MATHE TUTOR

Thomas Benes
Bojan Radenković

8 AHS

Grundkompetenztraining mit System

Technologieeinsatz berücksichtigt

Digitales Zusatzangebot:
Kommentierte Lösungen

HELBLING

Digitales Zusatzangebot

Die Lösungen und weitere digitale Zusatzangebote kannst du online abrufen.

1. **Registrieren**
   Wenn du bereits die HELBLING e-zone nutzt, kannst du diesen Schritt überspringen und gleich deinen Code aktivieren. Bist du neu auf der HELBLING e-zone, dann gehe auf **www.helbling-ezone.com** und registriere dich als Schülerin oder Schüler.

2. **Code aktivieren**
   Melde dich nun auf **www.helbling-ezone.com** an. Klicke auf **CODES**, rubble den auf dieser Seite eingeklebten Code frei und gib ihn in das Eingabefeld ein. Bestätige deine Eingabe mit **Code aktivieren**. **MatheTutor** erscheint nun unter den freigeschalteten Materialien.

3. **MatheTutor verwenden**
   Klicke nun im Hauptmenü auf **TRAINING** und wähle **MatheTutor** aus. Geschafft! Nun kannst du mit dem Training starten.

MATHETUTOR
8. Klasse AHS

Autorenteam: Thomas Benes, Bojan Radenković
Redaktion: Richard Mesarić
Illustrationen: Georg Flor, Wien
Umschlaggestaltung: CMS – Cross Media Solutions GmbH, Würzburg
Innenlayout: Nathanaël Gourdin & Katy Müller GbR, Leipzig
Satz: CMS – Cross Media Solutions GmbH, Würzburg
Druck: Athesia Druck, Innsbruck

ISBN 978-**3-99069-170**-0
1. Auflage: A1[1] 2022

mathewerkstatt

Thomas Benes, Bojan Radenković

MATHETUTOR

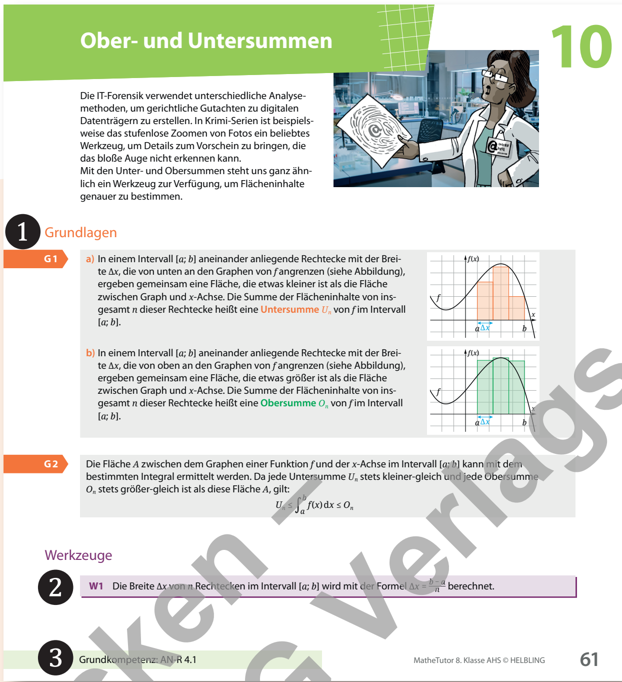
Grundkompetenztraining mit System

8. Klasse AHS

HELBLING

So begleitet dich dein MatheTutor

Ein **Tutor** begleitet durch den Lernprozess und hilft, wenn es schwierig wird.
Dieses Buch ist **dein Tutor** auf dem Weg durch die 8. Klasse und Richtung Mathematik-Matura.



Ober- und Untersummen

10

Die IT-Forensik verwendet unterschiedliche Analysemethoden, um gerichtliche Gutachten zu digitalen Datenträgern zu erstellen. In Krimi-Serien ist beispielsweise das stufenlose Zoomen von Fotos ein beliebtes Werkzeug, um Details zum Vorschein zu bringen, die das bloße Auge nicht erkennen kann.
Mit den Unter- und Obersummen steht uns ganz ähnlich ein Werkzeug zur Verfügung, um Flächeninhalte genauer zu bestimmen.

1 Grundlagen

G1 a) In einem Intervall $[a; b]$ aneinander anliegende Rechtecke mit der Breite Δx, die von unten an den Graphen von f angrenzen (siehe Abbildung), ergeben gemeinsam eine Fläche, die etwas kleiner ist als die Fläche zwischen Graph und x-Achse. Die Summe der Flächeninhalte von insgesamt n dieser Rechtecke heißt eine Untersumme U_n von f im Intervall $[a; b]$.

b) In einem Intervall $[a; b]$ aneinander anliegende Rechtecke mit der Breite Δx, die von oben an den Graphen von f angrenzen (siehe Abbildung), ergeben gemeinsam eine Fläche, die etwas größer ist als die Fläche zwischen Graph und x-Achse. Die Summe der Flächeninhalte von insgesamt n dieser Rechtecke heißt eine Obersumme O_n von f im Intervall $[a; b]$.

G2 Die Fläche A zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse im Intervall $[a; b]$ kann mit dem bestimmten Integral ermittelt werden. Da jede Untersumme U_n stets kleiner-gleich und jede Obersumme O_n stets größer-gleich ist als diese Fläche A, gilt:
$U_n \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq O_n$

Werkzeuge

2 W1 Die Breite Δx von n Rechtecken im Intervall $[a; b]$ wird mit der Formel $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ berechnet.

3 Grundkompetenz: AN-R 4.1

MatheTutor 8. Klasse AHS © HELBLING 61

1 Informiere dich

Ein **kurzer Text** stimmt dich auf das Kapitel ein.

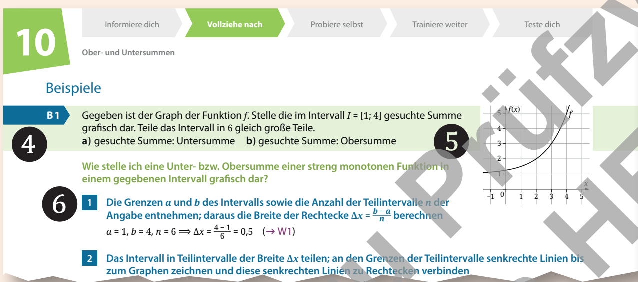
Die **Grundlagen** 1 benötigst du im ganzen Kapitel. Lerne oder wiederhole sie, bevor du loslegst.

Praktische **Werkzeuge** 2 stehen dir für einzelne Aufgaben oder Lösungsschritte zur Verfügung. Dein MatheTutor weist dich darauf hin, wenn es sinnvoll ist, sie einzusetzen.

Du erfährst hier auch, welche **Grundkompetenzen** 3 du in diesem Kapitel trainierst.

2 Vollziehe nach

3 Probiere selbst



10 Informiere dich | Vollziehe nach | Probiere selbst | Trainiere weiter | Teste dich

Ober- und Untersummen

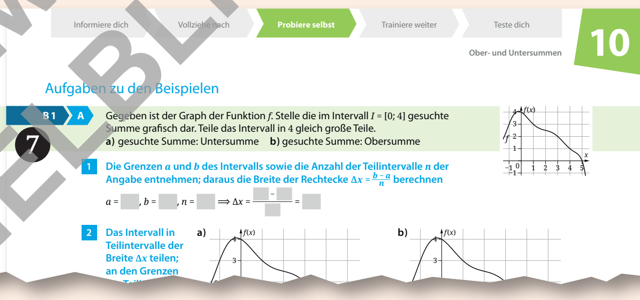
Beispiele

B1 Gegeben ist der Graph der Funktion f. Stelle die im Intervall $I = [1; 4]$ gesuchte Summe grafisch dar. Teile das Intervall in 6 gleich große Teile.
a) gesuchte Summe: Untersumme b) gesuchte Summe: Obersumme

Wie stelle ich eine Unter- bzw. Obersumme einer streng monotonen Funktion in einem gegebenen Intervall grafisch dar?

1 Die Grenzen a und b des Intervalls sowie die Anzahl der Teilintervalle n der Angabe entnehmen; daraus die Breite der Rechtecke $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ berechnen
$a = 1, b = 4, n = 6 \Rightarrow \Delta x = \frac{4-1}{6} = 0{,}5$ (→ W1)

2 Das Intervall in Teilintervalle der Breite Δx teilen; an den Grenzen der Teilintervalle senkrechte Linien bis zum Graphen zeichnen und diese senkrechten Linien zu Rechtecken verbinden



Informiere dich | Vollziehe nach | Probiere selbst | Trainiere weiter | Teste dich 10

Ober- und Untersummen

Aufgaben zu den Beispielen

B1 A Gegeben ist der Graph der Funktion f. Stelle die im Intervall $I = [0; 4]$ gesuchte Summe grafisch dar. Teile das Intervall in 4 gleich große Teile.
a) gesuchte Summe: Untersumme b) gesuchte Summe: Obersumme

1 Die Grenzen a und b des Intervalls sowie die Anzahl der Teilintervalle n der Angabe entnehmen; daraus die Breite der Rechtecke $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ berechnen

2 Das Intervall in Teilintervalle der Breite Δx teilen; an den Grenzen

Musterbeispiele 4 zeigen dir Schritt für Schritt, wie du für das Kapitel typische Aufgaben löst.

Leitfragen 5 helfen dir zu erkennen, um welche mathematische Fragestellung es sich handelt.

Modellschritte 6 schlüsseln die Lösung anschaulich auf und unterstützen dich dabei, den Lösungsweg vollständig nachzuvollziehen.

Die **Aufgaben zu den Beispielen** 7 sind wie die Musterbeispiele aufgebaut und ermöglichen es dir, selbst erste Aufgaben zu lösen.

Eine weitere *Probiere selbst*-Seite findest du online.

Hinweise zum Ausfüllen

In kleinen Kästchen trägst du Zahlen oder kurze Terme ein. Achte dabei besonders darauf, keine Vorzeichen oder Klammern zu vergessen.

$4x$ -3 $0{,}25$ (-2)

In großen Kästchen trägst du Zahlen mit vielen (Nachkomma-)Stellen, längere Terme oder Brüche ein.

$-3{,}1416$ $\sqrt{a^2+b^2}$ $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2x^3}$

In Kreisen trägst du Vorzeichen und Operatoren ein, d. h. die Zeichen:
+ – : · < ≥ > ≤ = ≠ ≈

≠ ≥ +

Du kreuzt leere Kästchen an, um die zugehörige Aussage als richtige Lösung zu markieren.

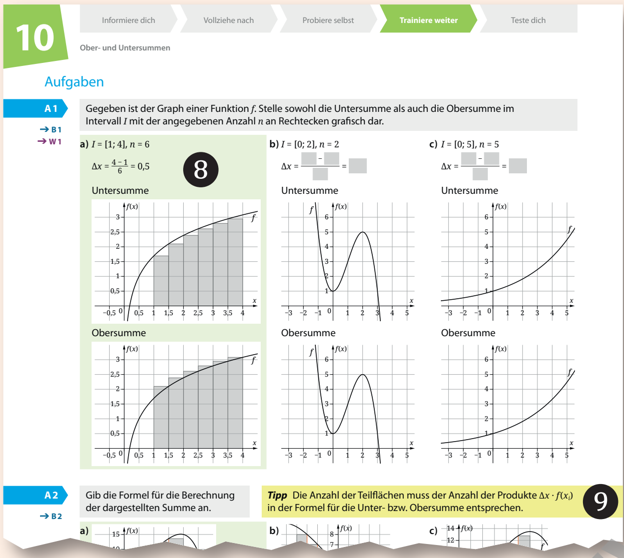
☐ ☒

Auf Schreibzeilen hast du Platz für ganze Rechenzeilen oder Text.

$\int_0^3 f(x)\,dx = 8$

Der Flächeninhalt beträgt 8 m².

4 Trainiere weiter



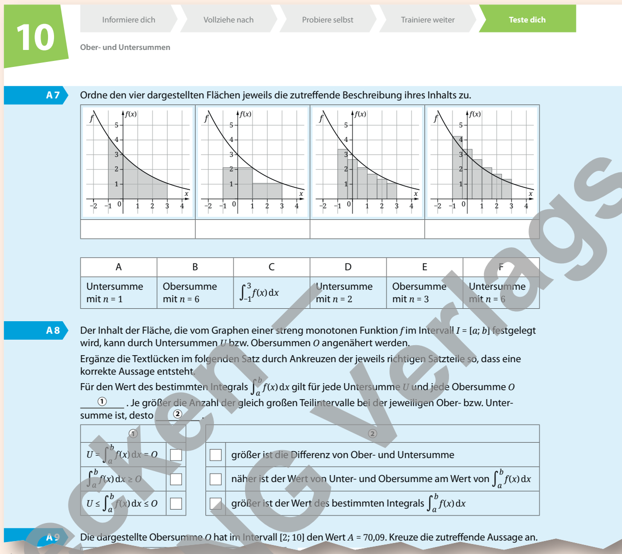
Löse die **Aufgaben** der Reihe nach, sie bauen oft aufeinander auf. Damit trainierst du die Grundkompetenzen des Kapitels.

Musterlösungen 8 sind grün hinterlegt.

Die **Tipps** 9 deines MatheTutors solltest du im Hinterkopf behalten.

Online findest du Lösungen mit Hinweisen und Erklärungen. Lies sie, auch wenn du die Aufgabe richtig gelöst hast. Sie helfen dir oft bei den nächsten Aufgaben.

5 Teste dich



Die letzte Seite jedes Kapitels bietet dir **typische Prüfungsaufgaben, wie bei Schularbeiten und bei der Matura.**

Für diese Seite solltest du immer ein eigenes Blatt für die Erstellung der Lösungen bereithalten.

Auf dieser Seite gibt es keine Hilfestellungen in Form von Tipps und Symbolen mehr.

In den Online-Lösungen findest du auch für diese Seite Hinweise und Erklärungen. Lies sie, auch wenn du die Aufgabe richtig gelöst hast.

Symbole

Für Zwischenschritte, Nebenrechnungen, Ergebnisse benötigst du hier ein eigenes Blatt.

T Diese Aufgabe wird durch Technologieeinsatz leichter.

T! Diese Aufgabe erfordert Technologieeinsatz. Dieser wird in den Lösungen erläutert.

→ B 2 Mit dieser Aufgabe wiederholst und festigst du Modellschritte aus einem Musterbeispiel.

→ G 2 Diese Aufgabe behandelt eine der Grundlagen aus *Informiere dich*.

→ W 2 Hier verwendest du eines der Werkzeuge aus *Informiere dich*. Schlag es bei Bedarf nach.

Online-Angebot

Wie du Zugang zum Online-Angebot erhältst, erfährst du auf der inneren Umschlagseite des MatheTutors.

Lösungen	Lösungen zu allen Aufgaben der aktuellen Seite mit Hinweisen und Erklärungen, auch zum Technologieeinsatz
Weitere Aufgaben	Eine weitere *Probiere selbst*-Seite zum jeweiligen Kapitel. Beschäftige dich bei Bedarf noch intensiver mit den Musterbeispielen.
Modellschritte	Die Modellschritte aus allen Kapiteln in einem Dokument praktisch zusammengefasst, zum Nachschlagen, Lernen und Üben

Inhaltsverzeichnis

Hinweise zur Verwendung von Fachbegriffen 5
Tipps und Hinweise zu den Aufgaben. 6

1 Unbestimmtes Integral und Stammfunktionen 7
2 Grafisches Integrieren von Polynomfunktionen 13
3 Bestimmtes Integral. 19
4 Flächenberechnung mittels Integral 25
5 Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen 31
6 Volumenberechnung mittels Integral 37
7 Physikalische Anwendungen des Integrals 43
8 Weitere Anwendungen des Integrals 49
9 Fortgeschrittene Integrationsmethoden 55
10 Ober- und Untersummen 61
11 Differenzengleichungen 67
12 Grundlagen der Normalverteilung 73
13 Eigenschaften der Normalverteilung 79
14 Anwendungen der Normalverteilung 87
15 Approximation der Binomialverteilung 93
16 Konfidenzintervalle 97
17 Hypothesentests. 103

Liste der Grundkompetenzen 109
Stichwortverzeichnis 110

Hinweise zur Verwendung von Fachbegriffen

Du findest auf dieser Seite Fachbegriffe, die dir beim Lernen begegnen können, aber im Stichwortverzeichnis des MatheTutors nicht vorkommen.

Dein MatheTutor gebraucht die gleichen mathematischen Fachbegriffe, die auch von deinem Schulbuch, deiner Lehrerin bzw. deinem Lehrer sowie in der schriftlichen Mathematik-Matura verwendet werden. Manchmal gibt es mehrere gleichwertige Ausdrücke für Dasselbe. Da Geschmäcker bekanntlich verschieden sind, kommt es vor, dass Erklärungsbedarf besteht. Es gibt auch Begriffe, die nicht alle einsetzen, weil man die Mathematik sowohl mit diesem Begriff als auch ohne ihn erfolgreich meistern kann.

Damit dadurch keine störenden Missverständnisse auftreten, sind auf dieser Seite Ausdrücke erläutert, die nicht in allen Schulbüchern oder bei allen Lehrerinnen und Lehrern gleich verwendet werden. Wenn du auf einen dieser Begriffe stößt, erfährst du hier, wie du ihn bei der Arbeit mit dem MatheTutor einordnen kannst.

abgeschlossenes Intervall (Kapitel 2–16): ein Intervall, dessen Grenzen zum Intervall gehören (eckige Klammern), z. B. $I = [0; 5]$

diskrete Zufallsvariable (Kapitel 15): eine Zufallsvariable, die nur einzelne Zahlenwerte annehmen kann (und nicht Intervalle von Zahlen)

Faktorregel des Integrals (Kapitel 1): Eine multiplikative Konstante k im Integranden kann als Faktor vor das Integral geschrieben werden.

Fehler 1. Art (Kapitel 17): Irrtumswahrscheinlichkeit = die Wahrscheinlichkeit, eine Nullhypothese fälschlicherweise zu verwerfen. Ein Fehler 2. Art wäre übrigens die Wahrscheinlichkeit, eine Nullhypothese fälschlicherweise nicht zu verwerfen.

Funktionsterm (Kapitel 1–10, 13–14): der Term in der Funktionsgleichung, der angibt, wie die abhängige Variable aus der unabhängigen errechnet wird, z. B. ist $x^2 - 1$ der Funktionsterm der durch die Funktionsgleichung $f(x) = x^2 - 1$ definierten Funktion.

Exponent: Hochzahl

gerade Funktion (Kapitel 3–4, 12–15): Funktion, deren Graph achsensymmetrisch (bzgl. der y-Achse) ist, es gilt $f(-x) = f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich von f

kontinuierliche Zufallsvariable (Kapitel 12–17): siehe *stetige Zufallsvariable*

monoton wachsend/streng monoton wachsend (Kapitel 2, 10): monoton steigend/streng monoton steigend

Normalapproximation (Kapitel 15): Approximation einer Binomialverteilung durch die Normalverteilung

offenes Intervall (Kapitel 2–16): Intervall, dessen Grenzen nicht zum Intervall gehören (runde Klammern), z. B. $I = (0; 5)$

Produktintegration (Kapitel 9): partielle Integration

Randfunktion (Kapitel 6): die Funktion, deren Graph bei Rotation um eine Achse die Oberfläche eines Rotationskörpers erzeugt

rekursive Darstellung (Kapitel 11): Vorschrift zur Berechnung von Gliedern einer Zahlenfolge aus vorhergehenden Folgengliedern. Differenzengleichungen sind rekursive Darstellungen.

Riemann-Summe (Kapitel 10): Ober- und Untersummen heißen auch Riemann-Summen

Sigma-Regeln (Kapitel 15): Für normalverteilte Zufallsvariablen X gilt:
$P(\mu - 1 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 1 \cdot \sigma) \approx 0{,}683$
$P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) \approx 0{,}954$
$P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) \approx 0{,}997$

stetige Zufallsvariable (Kapitel 12–17): eine Zufallsvariable, die nicht nur einzelne Zahlen, sondern Intervalle von Zahlen annehmen kann

Streubereich (Kapitel 14): symmetrisches Intervall um den Erwartungswert

Terrassenpunkt, -stelle (Kapitel 2): Sattelpunkt, -stelle

Termdarstellung einer Funktion (Kapitel 2–15): Funktionsgleichung in der Form $f(x)$ = Funktionsterm, z. B. $f(x) = x^2 - 1$

ungerade Funktion (Kapitel 3): Funktion, deren Graph punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs $(0 \mid 0)$ ist, es gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich von f

Vertrauensbereich (Kapitel 16): Konfidenzintervall

Wahrscheinlichkeitsfunktion (Kapitel 13, 17): Wahrscheinlichkeitsverteilung

Tipps und Hinweise zu den Aufgaben

Zwei wichtige Tipps für das Lösen der Aufgaben

Verwende die Lösungen, um etwaige Unklarheiten zu beseitigen. Tu das aber erst, nachdem du die Aufgabe selbstständig probiert hast.

Skizzen und Nebenrechnungen sind ein wichtiger Bestandteil jeder mathematischen Überlegung. Nimm ein Blatt Papier zur Hand, wenn der Platz im Buch nicht ausreichen sollte.

Aufgabenformate im Teil 1 der Matura

Formate	Hinweise	Beispiele	
Offenes Antwortformat	Formuliere eine Antwort in eigenen Worten, z. B. wenn eine Erklärung, Begründung, längere Rechnung oder Interpretation gefordert ist.	Seite 12	A18
Halboffenes Antwortformat	Ergänze eine teilweise vorgegebene Antwort, z. B. wenn einzelne Werte zu berechnen oder Abbildungen zu ergänzen sind.	Seite 24	A12
Lückentext	Ein Satz mit zwei Lücken ist vorgegeben. Für jede Lücke stehen mögliche Satzteile als Auswahl zur Verfügung. Kreuze jeweils genau einen der drei Satzteile an.	Seite 12	A16
Multiple Choice 2 aus 5	Kreuze die zwei richtigen unter fünf Antwortmöglichkeiten an.	Seite 12	A14
Multiple Choice 1 aus 6	Kreuze die eine richtige unter sechs Antwortmöglichkeiten an.	Seite 66	A9
Zuordnungsformat 4 aus 6	Schreibe in die vier Ausfüllfelder die Buchstaben der richtigen Antworten aus den sechs gegebenen Antwortmöglichkeiten.	Seite 48	A10
Konstruktionsformat	Ergänze die vorgegebene Abbildung durch ein grafisches Element, z. B. einen Funktionsgraphen.	Seite 66	A10

Zusätzliche Aufgabenformate in diesem Buch

Formate	Hinweise	Beispiele	
Multiple Choice x aus y	Kreuze die vorgegebene Anzahl an Antwortmöglichkeiten an. z. B. 1 aus 2, 1 aus 4 oder 2 aus 5.	Seite 11 Seite 46	A13 A1
Zuordnungsformat x aus y	Schreibe in alle Ausfüllfelder die Beschriftungen der richtigen Antworten aus den gegebenen Antwortmöglichkeiten.	Seite 76 Seite 83	A6 A6
Ausfüllen	Große Teile der Antwort sind vorgegeben. Ergänze die richtigen Zahlen, Terme, Symbole oder kurzen Texte.	Seite 10 Seite 16	A5 A2
Schritt für Schritt	Löse die Aufgabe in den vorgegebenen Schritten: Fülle Ausfüllkästchen und Schreibzeilen aus, ergänze Abbildungen und kreuze korrekte Aussagen an.	Seite 52 Seite 71	A1 A6

Unbestimmtes Integral und Stammfunktionen

Die spannende Aufgabe, seinen Familienstammbaum zu erforschen, wird umso schwieriger, je weiter er in die Vergangenheit zurückreicht. Die Lebenswege mancher Ahnen sind derart verschlungen, dass eine genaue Rekonstruktion unmöglich ist.
Die Suche nach einer Stammfunktion kann sich ebenfalls als knifflige Aufgabe erweisen – und das, obwohl es unendlich viele davon gibt.

Grundlagen

G 1 Für eine **Stammfunktion** F einer Funktion f gilt der Zusammenhang $F'(x) = f(x)$.

G 2 Eine gegebene Funktion f hat unendlich viele Stammfunktionen. Durch die Addition einer beliebigen reellen Zahl c (**Integrationskonstante**) zu einer Stammfunktion erhält man eine weitere: Ist F eine Stammfunktion von f, so ist $F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine weitere Stammfunktion von f.
Alle Stammfunktionen zusammen werden durch den Ausdruck des **unbestimmten Integrals** erfasst.
Man schreibt:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

G 3 Das Auffinden einer Stammfunktion wird **Integrieren** genannt und geschieht mittels **Integrationsregeln**.

Integrieren ← → Ableiten

Unbestimmtes Integral/Stammfunktionen	**gegebene Funktion f**	**Ableitung**
$\int a\,\mathrm{d}x = a \cdot x + c$	$f(x) = a \quad (a \in \mathbb{R})$	$f'(x) = 0$
für $r \neq -1$: $\int x^r\,\mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$ für $r = -1$: $\int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln(x) + c \quad (x > 0)$	$f(x) = x^r \quad (r \in \mathbb{R})$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$	$f(x) = \mathrm{e}^x$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$
$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + c$	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + c$	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$

G 4 Weitere **Integrationsregeln**:
Summe/Differenz zweier Funktionen: $\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$
Multiplikative Konstante $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$: $\int [k \cdot f(x)]\,\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$

G 5 Enthält der Funktionsterm ein Argument der Form $k \cdot x$ statt x, wird mit dem Faktor $\frac{1}{k}$ multipliziert:
$g(x) = f(k \cdot x) \quad (k \in \mathbb{R}^*)$ Beispiele: $\sin(4x)$, $\mathrm{e}^{-1{,}2x}$, $\cos(b^2 \cdot x)$, $(3x)^5$
$G(x) = \frac{1}{k} \cdot F(k \cdot x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$

Werkzeuge

W1 Will man prüfen, ob F eine Stammfunktion von f ist, leitet man F ab, und dabei muss f herauskommen.

W2 Ausdrücke der Gestalt $\frac{1}{x^r}$ können integriert werden, indem sie zuerst zu x^{-r} umgeschrieben werden: $\int \frac{1}{x^r}\,\mathrm{d}x = \int x^{-r}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-r+1}}{-r+1} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

W3 Wurzelausdrücke $\sqrt[n]{x^m}$ können integriert werden, indem sie zuerst zu $x^{\frac{m}{n}}$ umgeschrieben werden: $\int \sqrt[n]{x^m}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{m}{n}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

Grundkompetenzen: AN-R 3.1 + 4.2

Beispiele

B 1 Gegeben ist die Polynomfunktion $f(x) = 8x^3 - 10x + \frac{1}{3}$. Gib zwei Stammfunktionen von f an.

Wie bestimme ich Stammfunktionen einer Polynomfunktion?

1 Die Polynomfunktion integrieren

Wir integrieren jeden Term, indem wir in der Potenz die Hochzahl um 1 erhöhen und durch die neue Hochzahl dividieren. Beim konstanten Glied $\frac{1}{3}$ bedeutet das, es einfach mit x zu multiplizieren. Anschließend addieren wir die Konstante c.

$$\int\left(8x^3 - 10x + \tfrac{1}{3}\right)\mathrm{d}x = 8 \cdot \frac{x^{\overset{3+1}{4}}}{4} - 10 \cdot \frac{x^{\overset{1+1}{2}}}{2} + \frac{1}{3}x + c = 2x^4 - 5x^2 + \frac{1}{3}x + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

2 Eine beliebige reelle Zahl für die Integrationskonstante einsetzen und die Stammfunktion angeben

z. B. $c_1 = 3 \Longrightarrow F_1(x) = 2x^4 - 5x^2 + \frac{1}{3}x + 3$ und $c_2 = -5 \Longrightarrow F_2(x) = 2x^4 - 5x^2 + \frac{1}{3}x - 5$

B 2 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$. Bestimme $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Wie ermittle ich das unbestimmte Integral einer Funktion, in deren Termen x unter Wurzeln oder im Nenner vorkommt?

1 Die Terme der Funktion jeweils in Potenzschreibweise angeben

$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-2}$

2 Die einzelnen Terme mit der Regel $\int x^r\,\mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$ integrieren

$$\int\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^{\overset{\frac{1}{2}+1}{\frac{3}{2}}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\overset{-2+1}{-1}}}{-1} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^{-1} + c \quad (c \in \mathbb{R})$$ (→ W2 und → W3)

B 3 Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 9$. Ermittle diejenige Stammfunktion F von f, deren Graph durch den Punkt $P = (6\,|\,-8)$ verläuft.

Wie ermittle ich diejenige Stammfunktion F von f, deren Graph durch den gegebenen Punkt P verläuft?

1 Das unbestimmte Integral der Funktion als $F(x)$ aufschreiben

$\int(-x^2 + 9)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^3}{3} + 9x + c \Longrightarrow F(x) = -\frac{x^3}{3} + 9x + c \quad (c \in \mathbb{R})$

2 Die x-Koordinate des gegebenen Punktes für x sowie die y-Koordinate für $F(x)$ einsetzen und die Integrationskonstante c berechnen

Wir setzen $P = (6\,|\,-8)$ in $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 9x + c$ ein: $-8 = -\frac{6^3}{3} + 9 \cdot 6 + c$

$-8 = -18 + c \Longrightarrow c = 10$

Stammfunktion: $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 9x + 10$

B 4 Berechne die Integrale **a)** $\int 3a^2 \cdot b\,\mathrm{d}a$ **b)** $\int 3a^2 \cdot b\,\mathrm{d}b$.

Wie integriere ich eine Funktion nach einer bestimmten Variablen?

1 Die Variable erkennen, nach der die Funktion integriert wird

a) An da erkennen wir, dass nach a integriert wird. **b)** An db erkennen wir, dass nach b integriert wird.

2 Diese Variable im Integral markieren und mit den passenden Integrationsregeln integrieren

Wir wenden die Integrationsregeln für die Variable an, die die Rolle von x übernommen hat.

$\int 3a^2 \cdot b\,\mathrm{d}a = 3\frac{a^3}{3} \cdot b + c \quad (c \in \mathbb{R})$

$\int 3a^2 \cdot b\,\mathrm{d}b = 3a^2 \cdot \frac{b^2}{2} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

Aufgaben zu den Beispielen

B 1 **A** Gegeben ist die Polynomfunktion $f(x) = -6x^2 - 4x + 3$. Gib zwei Stammfunktionen von f an.

1 **Die Polynomfunktion integrieren**

$\int (\_\_\_\_\_\_\_\_)\,dx = \square \cdot \frac{x^{\square}}{\square} \bigcirc \square \cdot \frac{x^{\square}}{\square} \bigcirc \square \cdot \square + c =$ ________

2 **Eine beliebige reelle Zahl für die Integrationskonstante einsetzen und die Stammfunktion angeben**

$c_1 = \square \Longrightarrow F_1(x) =$ ________

$c_2 = \square \Longrightarrow F_2(x) =$ ________

B 2 **A** Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4\sqrt{x} - \frac{1}{x^3}$. Bestimme $\int f(x)\,dx$.

1 **Die Terme der Funktion jeweils in Potenzschreibweise angeben**

$f(x) = 4\sqrt{x} - \frac{1}{x^3} = \square\, x^{\frac{\square}{\square}} \bigcirc x^{\square}$

2 **Die einzelnen Terme mit der Regel $\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$ integrieren**

$\int (4x^{\frac{1}{2}} - x^{-3})\,dx = \square \cdot \frac{x^{\square}}{\square} \bigcirc \frac{x^{\square}}{\square} + \square =$ ________

B 3 **A** Gegeben ist die Funktion $f(x) = x - 5$. Ermittle diejenige Stammfunktion F von f, deren Graph durch den Punkt $P = (2\,|\,3)$ verläuft.

1 **Das unbestimmte Integral der Funktion als $F(x)$ aufschreiben**

$\int (\_\_\_\_\_\_\_\_)\,dx =$ ________ $\Longrightarrow F(x) =$ ________

2 **Die x-Koordinate des gegebenen Punktes für x sowie die y-Koordinate für $F(x)$ einsetzen und die Integrationskonstante c berechnen**

Setze $P = (2\,|\,3)$ in $F(x) = \frac{x^2}{2} - 5x + c$ ein: $\square = \frac{\square^2}{2} - 5 \cdot \square + c$

________ $\Longrightarrow c = \square$

Stammfunktion: $F(x) =$ ________

B 4 **A** Berechne die Integrale **a)** $\int 7x^2 \cdot y^3\,dx$ **b)** $\int 7x^2 \cdot y^3\,dy$

1 **Die Variable erkennen, nach der die Funktion integriert wird**

a) d$\square$ $\Longrightarrow$ Integration nach $\square$ **b)** d$\square$ $\Longrightarrow$ Integration nach $\square$

2 **Diese Variable im Integral markieren und mit den passenden Integrationsregeln integrieren**

$\int 7x^2 \cdot y^3\,dx = \square \cdot \frac{\square^{\square}}{\square} \cdot \square + c \quad (c \in \mathbb{R})$ $\int 7x^2 \cdot y^3\,dy = \square \cdot \frac{\square^{\square}}{\square} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

Lösungen Weitere Aufgaben

Aufgaben

A 1 → B 1

Gegeben ist die Polynomfunktion f. Bestimme zwei Stammfunktionen von f.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 6 \Longrightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 6x + c \Longrightarrow$ z. B. $F_1(x) = \frac{x^3}{9} - x^2 + 6x - 3$ und $F_2(x) = \frac{x^3}{9} - x^2 + 6x + 1$

b) $f(x) = -\frac{2}{5}x - 3 \Longrightarrow \int f(x)\,dx = -\frac{2}{5} \cdot \frac{x^{\square}}{\square} - 3 \cdot \square + \square \Longrightarrow F_1(x) =$ ______

$F_2(x) =$ ______

c) $f(x) = 6x^4 - \frac{3}{2}x$ **d)** $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{5}x + 1$ **e)** $f(x) = 3x^2 + 12x - 8$ **f)** $f(x) = \frac{x^5}{2} - 1$

A 2 → B 2 → W 2–W 3

Gegeben ist die Funktion f. Bestimme ihre Stammfunktion F mit $c = 0$.

	① f in Potenzschreibweise angeben	② f integrieren, Stammfunktion vereinfachen
a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{7}{x^4}$	$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 7x^{-4}$	$\int f(x)\,dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 7 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{7}{3}x^{-3}$
b) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x^5}$	$f(x) = x^{\square} \bigcirc \square x^{\square}$	$\int f(x)\,dx = \frac{x^{\square}}{\square} \bigcirc \square \cdot \frac{x^{\square}}{\square} = \square x^{\square} \bigcirc \square x^{\square}$

c) $f(x) = -\sqrt[3]{x} - \frac{5}{x^2}$ **d)** $f(x) = \sqrt[5]{x^2} + \frac{1}{x^3}$ **e)** $f(x) = \sqrt{x} - \frac{4}{x^5}$ **f)** $f(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$

A 3 → B 3

Gib diejenige Stammfunktion F der gegebenen Funktion f an, deren Graph durch den Punkt P verläuft.

	① f integrieren und $F(x)$ aufschreiben	② P in $F(x)$ einsetzen und c berechnen	③ c in Stammfunktion $F(x)$ einsetzen
a) $f(x) = -6x + 5$, $P = (1 \mid -2)$	$F(x) = -3x^2 + 5x + c$	$-2 = -3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + c$; $c = -4$	$F(x) = -3x^2 + 5x - 4$
b) $f(x) = 12x^3$, $P = (2 \mid 50)$	$F(x) =$ ______	$\square = 3 \cdot \square^4 + c$; $c = \square$	$F(x) =$ ______

c) $f(x) = x^2 + x$, $P = \left(-3 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right)$ **d)** $f(x) = \sin(x)$, $P = (\pi \mid -3)$ **e)** $f(x) = \cos(x)$, $P = \left(\frac{\pi}{2} \,\middle|\, 0\right)$ **f)** $f(x) = e^x$, $P = (1 \mid e + 1)$

A 4 → B 4

Bestimme das unbestimmte Integral. Setze die Integrationskonstante c gleich null.

a) $\int \frac{1}{2}(s^2 \cdot r + t)\,ds = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s^3}{3} \cdot r + t \cdot s\right) = \frac{s^3 \cdot r}{6} + \frac{s \cdot t}{2}$

b) $\int (x^2 \cdot y - z)\,dy = x^2 \cdot \frac{\square}{\square} - z \cdot \square$

c) $\int (4e + 5f \cdot g^2)\,df = 4e \cdot \square + 5 \cdot \frac{\square}{\square} \cdot g^2$

d) $\int \left(\frac{m^2 \cdot f \cdot g}{3}\right)dg =$ ______

e) $\int \left(\frac{a^2 \cdot x}{b} + c\right)dx =$ ______

A 5 → W 1

Stelle fest, ob die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist.

a) $f(x) = 2x^2$
$F(x) = 3x^3$
$F'(x) = 9x^2$
Ja ☐ Nein ☒
denn $F'(x) \neq f(x)$

b) $f(x) = 3x^2$
$F(x) = x^3$
$F'(x) =$ ______
Ja ☐ Nein ☐
denn $F'(x) \bigcirc f(x)$

c) $f(x) = 2x$
$F(x) = x^2 - 3$
$F'(x) =$ ______
Ja ☐ Nein ☐
denn $F'(x) \bigcirc f(x)$

d) $f(x) = 5$
$F(x) = x + 5$
$F'(x) =$ ______
Ja ☐ Nein ☐
denn $F'(x) \bigcirc f(x)$

A 6

Gegeben ist eine Funktion f. Bestimme eine Stammfunktion von f mittels Technologie.

a) $f(x) = x \cdot e^x$ **b)** $f(x) = x \cdot \sin(x)$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x+1}$ **d)** $f(x) = \ln(x)$ für $x > 0$ **e)** $f(x) = x \cdot 2^{x^2}$

A 7 Bestimme die Konstante $a \in \mathbb{R}$ so, dass F eine Stammfunktion von f ist.

→ W 1

a) $f(x) = 6x^2$
$F(x) = a \cdot x^3$
$F'(x) = 3a \cdot x^2$
Aus $F' = f$ folgt
$3a \cdot x^2 = 6x^2$
$\Longrightarrow a = 2$

b) $f(x) = a \cdot x^3$
$F(x) = 20x^4$
$F'(x) =$ ______
Aus $F' = f$ folgt
______ = ______
$\Longrightarrow a = \square$

c) $f(x) = x + 1$
$F(x) = a \cdot x^2 + x$
$F'(x) =$ ______
Aus $F' = f$ folgt
______ = ______
$\Longrightarrow a = \square$

d) $f(x) = e^x$
$F(x) = a \cdot e^x$
$F'(x) =$ ______
Aus $F' = f$ folgt
______ = ______
$\Longrightarrow a = \square$

A 8 Kreuze alle Stammfunktionen der Funktion $f(x) = \sin(x)$ an.

→ G 3

$\cos(x)$	$-\cos(x) + 1$	$-\cos(x) + x$	$2 - \cos(x)$	$-2\cos(x)$
☐	☐	☐	☐	☐

A 9 Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an, wenn $F' = f$.

→ G 1–G 2

a)

f ist eine Stammfunktion von F.	☐
F ist eine Stammfunktion von f.	☐
f' ist eine Stammfunktion von F.	☐
f' ist eine Stammfunktion von f.	☐
f' ist eine Stammfunktion von f''.	☐

b)

$2F$ ist eine Stammfunktion von f.	☐
$-F$ ist eine Stammfunktion von f.	☐
$F - 5$ ist eine Stammfunktion von f.	☐
$6 - F$ ist eine Stammfunktion von f.	☐
$F + \frac{1}{2}$ ist eine Stammfunktion von f.	☐

A 10 Fülle die Kästchen unter Verwendung der passenden Integrationsregeln aus.

→ G 4

a) $\int (2x + 3)\,dx = \square \cdot \int x\,dx + \int \square\,dx$

b) $\int (2x^2 - 4)\,dx = \square \cdot \int x^2\,dx \bigcirc \int \square\,dx$

c) $\int [5(x + 1)^2 - x]\,dx = \square \cdot \int (x + 1)^2\,dx \bigcirc \int \square\,dx$

d) $\int (2x \cdot e^x + 1)\,dx = \square \cdot \int \square\,dx + \int \square\,dx$

A 11 Schreibe das Integral als Summe von zwei Integralen.

→ G 4

a) $\int [2f(x) - 3g(x)]\,dx = 2 \cdot \int f(x)\,dx - 3 \cdot \int g(x)\,dx$

b) $\int \left[\frac{1}{3}f(x) + 5g(x)\right]dx = \square \cdot \int f(x)\,dx \bigcirc \square \cdot \int g(x)\,dx$

c) $\int [4f(x) - x]\,dx$ **d)** $\int [b + 8g(x)]\,dx$ **e)** $\int \left[\frac{f(x)}{2} - \frac{g(x)}{3}\right]dx$ **f)** $\int [-2f(x) \cdot g(x) + h(x)]\,dx$

A 12 Bestimme das unbestimmte Integral und setze die Integrationskonstante c gleich null.

→ G 5

a) $\int e^{4x}\,dx = \frac{1}{4} \cdot e^{4x}$ **b)** $\int 3\cos(2x)\,dx = 3 \cdot \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right] = \frac{3}{2}\sin(2x)$

c) $\int 2e^{2x} =$ ______

d) $\int 6\sin(3x)\,dx =$ ______

e) $\int 5\cos(5x)\,dx =$ ______

f) $\int -\cos(-x)\,dx =$ ______

A 13 Gegeben sind Funktionen f und g mit $f(x) = 2 \cdot g(2x)$. G ist eine Stammfunktion der Funktion g.
Kreuze diejenige Funktion an, die eine Stammfunktion von f ist.

→ G 5

$F_1(x) = 2 \cdot G(x)$	$F_2(x) = G(2x)$	$F_3(x) = 2 \cdot G(2x)$	$F_4(x) = [G(x)]^2$	$F_5(x) = [G(2x)]^2$
☐	☐	☐	☐	☐

A 14 Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.

Es gibt eine Funktion f, die genau eine Stammfunktion F besitzt.	☐
Eine Funktion f kann mehrere Ableitungsfunktionen der Gestalt $f' + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ besitzen.	☐
Es gibt eine Funktion f, die einer ihrer Stammfunktionen gleich ist.	☐
Haben zwei Funktionen f und g dieselben Stammfunktionen, so gilt $f = g$.	☐
Haben zwei Funktionen f und g dieselben Ableitungsfunktionen, so gilt $f = g$.	☐

A 15 Gegeben sind die Funktionen f und g. Kreuze die beiden jedenfalls zutreffenden Aussagen an.

$\int [2 + f(x)]\,dx = 2 + \int f(x)\,dx$	☐
$\int 2 \cdot f(x)\,dx = 2 \cdot \int f(x)\,dx$	☐
$\int f(2 \cdot x)\,dx = 2 \cdot \int f(x)\,dx$	☐
$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$	☐
$\int [2f(x) - g(x)]\,dx = 2\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$	☐

A 16 Für die drei Funktionen f, g und h gilt: g ist eine Stammfunktion von f und h eine Stammfunktion von g.

Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Wenn man die zweite Ableitung der Funktion ___①___ bildet, erhält man die Funktion ___②___ .

①	
f	☐
g	☐
h	☐

	②
☐	f
☐	g
☐	h

A 17 Gegeben ist die Funktion $f(x) = a \cdot \sqrt{x}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Gib eine Stammfunktion von f an.

b) Bestimme $\int a \cdot \sqrt{x}\,da$.

A 18 Gegeben sind zwei nicht konstante Funktionen F und G, für die der Zusammenhang $F(x) + G(x) = 1$ gilt. Begründe, warum $F(x)$ und $G(x)$ nicht Stammfunktionen ein und derselben Funktion sein können.

A 19 Kreuze die Funktionsgleichung an, für die die Gleichung $F = -f$ erfüllt ist.

$f(x) = \sin(x)$	$f(x) = \cos(x)$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$f(x) = e^x$	$f(x) = e^{-x}$
☐	☐	☐	☐	☐	☐

A 20 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = x^2 - 3$ und $g(x) = \frac{x^3}{3} - 3x + 1$.

a) Zeige, dass g eine Stammfunktion von f ist.

b) Erkläre, wodurch sich die verschiedenen Stammfunktionen einer Funktion unterscheiden, und gib zwei weitere Stammfunktionen von f an.

c) Gib die Stammfunktion von g an, deren Graph den Punkt $P = (6 \mid 65)$ enthält.

Grafisches Integrieren von Polynomfunktionen

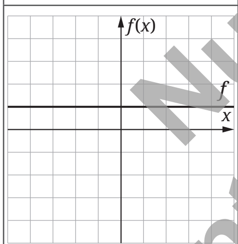
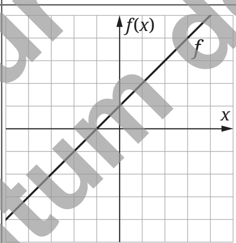
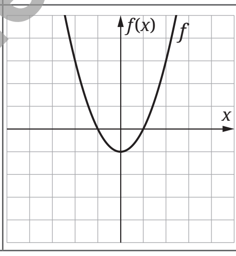
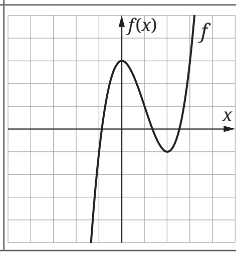
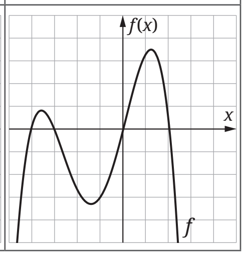
Judith holt ihren Enkelsohn Jakob, der eine Zeichnung in der Hand hält, vom Kindergarten ab. Die Oma fragt: „Na, wer ist denn das auf dem Bild, ist das der Krampus?" Jakob antwortet: „Nein, das bist du!"
Zeichnet man zum ersten Mal eine Stammfunktion, kann es passieren, dass so manch kuriose Kurve das Licht der Welt erblickt. In beiden Fällen gilt: Übung macht den Meister!

Grundlagen

G 1 Beim **grafischen Integrieren** wird aus dem gegebenen Graphen einer Funktion f der Graph einer möglichen Stammfunktion F ermittelt. Die folgende Tabelle fasst zusammen, welche speziellen Punkte (Nullstellen N, Extrempunkte E, Wendepunkte W und Sattelpunkte S) des Graphen von F welchen speziellen Punkten der gegebenen Polynomfunktion f entsprechen.

F ← f	in Worten
N ← –	Die Nullstellen des Graphen von F entsprechen keinem speziellen Punkt im Graphen von f.
E ← N	Eine Nullstelle des Graphen von f wird zu einem Extrempunkt im Graphen von F.
W ← E	Ein Extrempunkt des Graphen von f wird zu einem Wendepunkt im Graphen von F.
S ← $N + E$	Ein Extrempunkt von f, der zugleich eine Nullstelle ist (d. h. der Graph berührt die x-Achse) wird zu einem Sattelpunkt im Graphen von F.

G 2 Beim Integrieren erhöht sich der Grad einer Polynomfunktion um 1, d. h. ist der Grad von f gleich n, so ist der Grad von F gleich $n + 1$.
Deshalb ist es nützlich, typische Verläufe von Graphen von Polynomfunktionen zu kennen.
Den Grad einer Polynomfunktion erhält man z. B. mit der folgenden Faustregel:
Grad $f = E + 2 \cdot S + 1$, wobei E die Anzahl der Extrempunkte ist und S die Anzahl der Sattelpunkte.

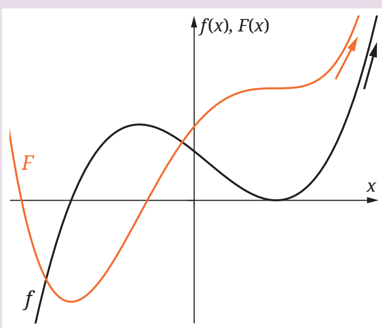
Grad 0	Grad 1	Grad 2	Grad 3	Grad 4
				

Werkzeuge

W1 Die Graphen der verschiedenen Stammfunktionen $F + c$ ($c \in \mathbb{R}$) einer gegebenen Funktion f unterscheiden sich lediglich durch Verschiebung in y-Richtung, d. h. die Integrationskonstante c verschiebt den Graphen nach oben bzw. unten.

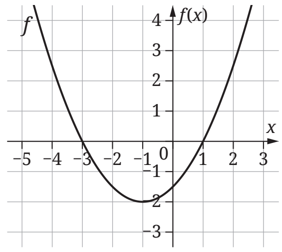
W2 Die Stammfunktionen einer konstanten Funktion $f(x) = k$ mit $k \in \mathbb{R}$ sind lineare Funktionen $F(x) = k \cdot x + d$, wobei d die Rolle der Integrationskonstanten übernimmt. Die y-Koordinate des Graphen einer konstanten Funktion entspricht also der Steigung ihrer Stammfunktionen.

W3 Beim grafischen Integrieren zu beachten: Stammfunktionen F einer Polynomfunktion f müssen „rechts", d. h. für $x \to \infty$, die gleiche Monotonie aufweisen wie f (siehe Pfeile).



Beispiele

B 1 Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion 2. Grades. Skizziere den Graphen einer ihrer Stammfunktionen.



Wie zeichne ich die Stammfunktion einer Polynomfunktion, deren Graph gegeben ist?

1 **Senkrechte Linien durch die Nullstellen von *f* zeichnen und mit e_1, e_2, … beschriften**

→ G 1

2 **Den Graphen der Stammfunktion *F* von rechts beginnend bis zur ersten Linie zeichnen; die Stammfunktion hat rechts die gleiche Monotonie wie *f***

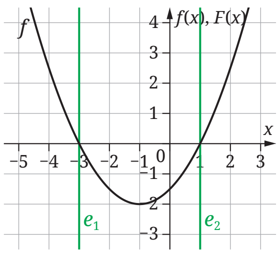
f ist rechts steigend, d. h. *F* muss rechts ebenfalls steigend sein. (→ W3)

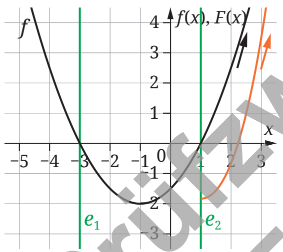
3 **An der senkrechten Linie den Verlauf von *F* so ändern, dass ein Extrempunkt entsteht; für alle Linien wiederholen**

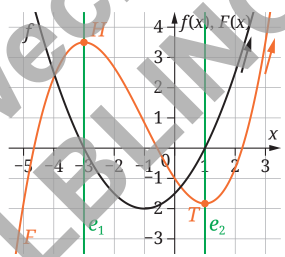
Extrempunkte von *F* an den Stellen $x = -3$ und $x = 1$

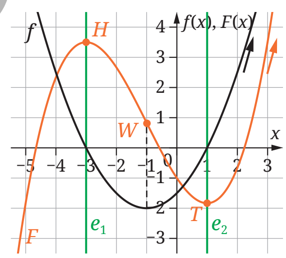
4 **Die Wendepunkte des Graphen der Stammfunktion an den lokalen Extremstellen der Funktion *f* einzeichnen**

Wendepunkt von *F* an der Stelle $x = -1$

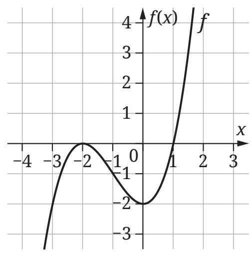








B 2 Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades. Skizziere den Graphen einer ihrer Stammfunktionen.



Wie zeichne ich eine Stammfunktion einer Polynomfunktion, wenn der gegebene Graph die *x*-Achse berührt?

1 **Senkrechte Linien durch die Nullstellen von *f* zeichnen; eine Linie mit *s* beschriften, wenn der Graph dort die *x*-Achse berührt, und mit *e*, wenn er die *x*-Achse schneidet**

→ G 1

2 **Den Graphen der Stammfunktion *F* von rechts beginnend bis zur ersten Linie zeichnen; die Stammfunktion hat rechts die gleiche Monotonie wie *f***

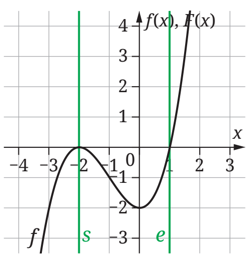
f ist rechts steigend, d. h. *F* muss rechts ebenfalls steigend sein. (→ W3)

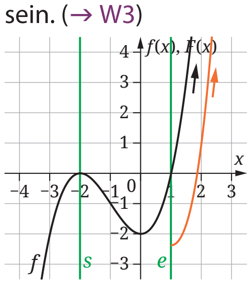
3 **An der senkrechten Linie einen Sattelpunkt einzeichnen, wenn die Linie mit *s* beschriftet ist, und einen Extrempunkt, wenn sie mit *e* beschriftet ist; für alle Linien wiederholen**

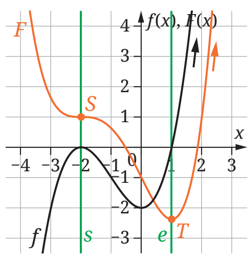
Extrempunkt von *F* an der Stelle $x = 1$
Sattelpunkt von *F* an der Stelle $x = -2$

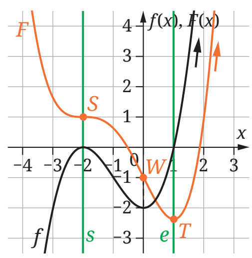
4 **Die Wendepunkte des Graphen der Stammfunktion an den lokalen Extremstellen der Funktion *f* einzeichnen**

Wendepunkt von *F* an der Stelle $x = 0$



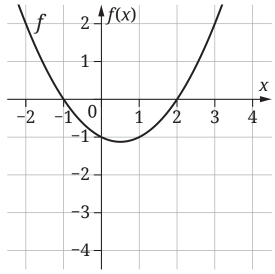






Aufgaben zu den Beispielen

B 1 **A** Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion 2. Grades. Skizziere den Graphen einer ihrer Stammfunktionen.

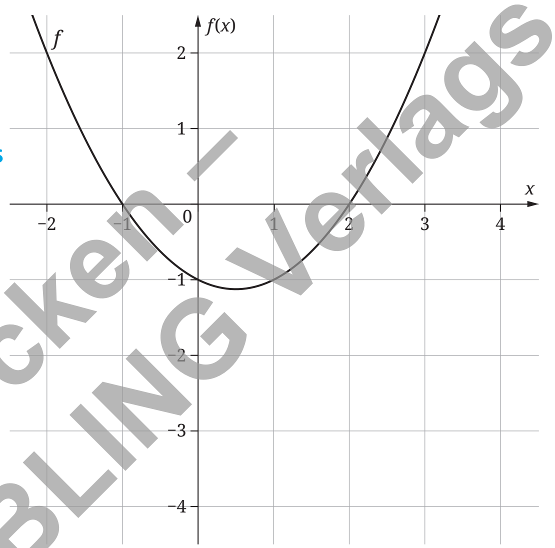


1 **Senkrechte Linien durch die Nullstellen von f zeichnen und mit e_1, e_2, … beschriften**

2 **Den Graphen der Stammfunktion F von rechts beginnend bis zur ersten Linie zeichnen; die Stammfunktion hat rechts die gleiche Monotonie wie f**

f ist rechts ____________________, d. h. F muss

rechts ebenfalls ____________________ sein.



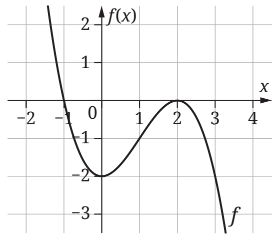
3 **An der senkrechten Linie den Verlauf von F so ändern, dass ein Extrempunkt entsteht; für alle Linien wiederholen**

Extrempunkte von F an den Stellen x = ☐ und x = ☐

4 **Die Wendepunkte des Graphen der Stammfunktion an den lokalen Extremstellen der Funktion f einzeichnen**

Wendepunkt von F an der Stelle x = ☐

B 2 **A** Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades. Skizziere den Graphen einer ihrer Stammfunktionen.

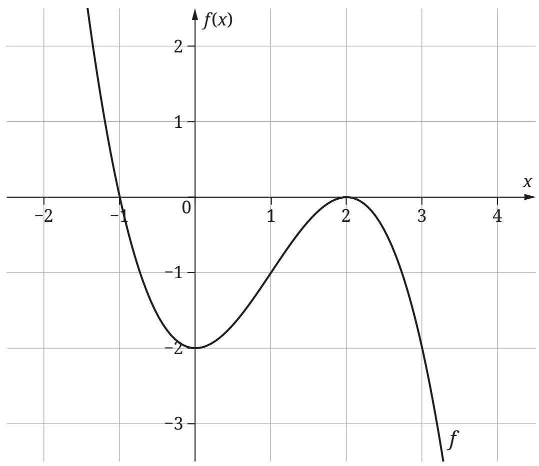


1 **Senkrechte Linien durch die Nullstellen von f zeichnen; eine Linie mit s beschriften, wenn der Graph dort die x-Achse berührt, und mit e, wenn er die x-Achse schneidet**

2 **Den Graphen der Stammfunktion F von rechts beginnend bis zur ersten Linie zeichnen; die Stammfunktion hat rechts die gleiche Monotonie wie f**

f ist rechts ____________________, d. h. F muss

rechts ebenfalls ____________________ sein.



3 **An der senkrechten Linie einen Sattelpunkt einzeichnen, wenn die Linie mit s beschriftet ist, und einen Extrempunkt, wenn sie mit e beschriftet ist; für alle Linien wiederholen**

Extrempunkt von F an der Stelle x = ☐

Sattelpunkt von F an der Stelle x = ☐

4 **Die Wendepunkte des Graphen der Stammfunktion an den lokalen Extremstellen der Funktion f einzeichnen**

Wendepunkt von F an der Stelle x = ☐

Aufgaben

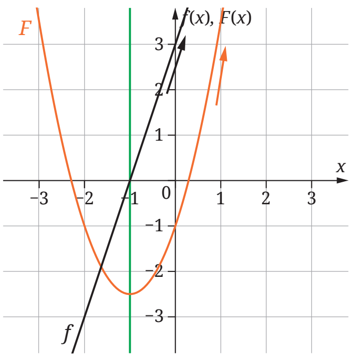
A 1

→ B 1
→ W 3

Skizziere den Graphen einer Stammfunktion F der gegebenen linearen Funktion f.

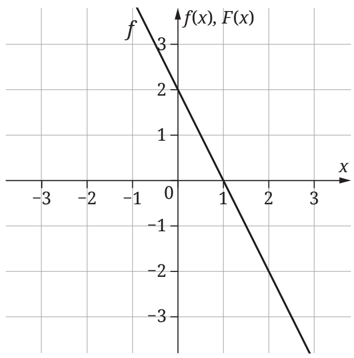
Tipp Jede lineare, nicht konstante Funktion f ergibt integriert eine quadratische Funktion (Grad 2). Der Graph einer Stammfunktion von f ist daher eine Parabel. (→ G 2)

a) f ist rechts steigend.
F ist rechts steigend.



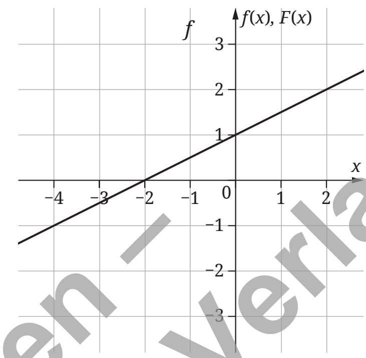
b) f ist rechts ______.

F ist rechts ______.



c) f ist rechts ______.

F ist rechts ______.



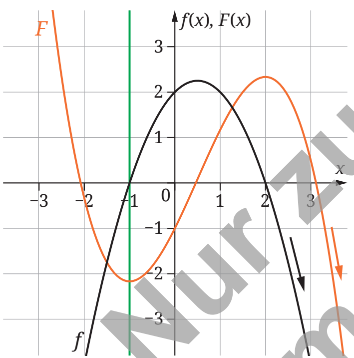
A 2

→ B 1
→ G 2
→ W 3

Skizziere den Graphen einer Stammfunktion F der gegebenen quadratischen Funktion f.
Gib den Grad der Stammfunktion an.

a) f ist rechts fallend.
F ist rechts fallend.

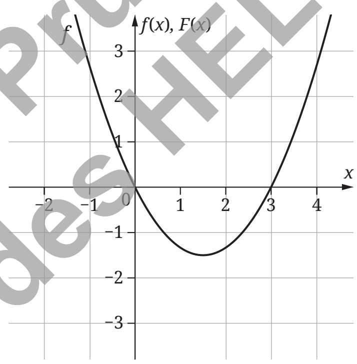
Grad $f = E + 2S + 1 = 2$
$\Longrightarrow$ Grad $F = 3$



b) f ist rechts ______.

F ist rechts ______.

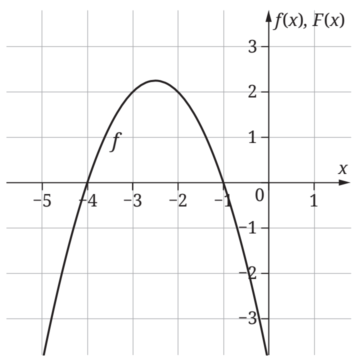
Grad f = ☐ $\Longrightarrow$ Grad F = ☐



c) f ist rechts ______.

F ist rechts ______.

Grad f = ☐ $\Longrightarrow$ Grad F = ☐

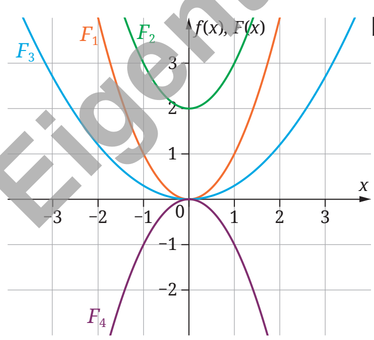


A 3

→ W 1

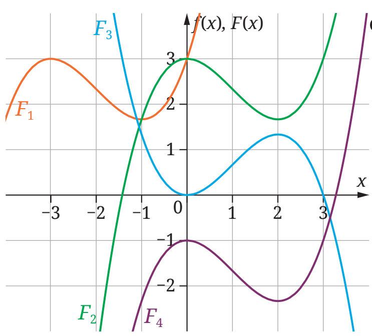
Zwei der abgebildeten Funktionen F_i sind Stammfunktion derselben Funktion. Gib an, welche.

a)



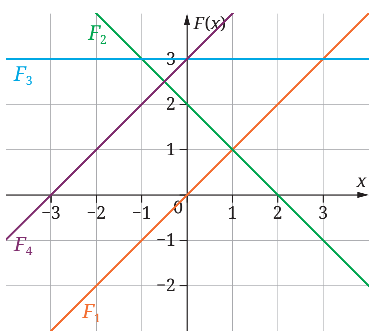
F☐ und F☐

b)



F☐ und F☐

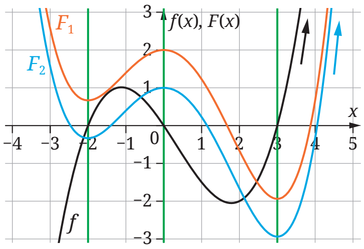
c)

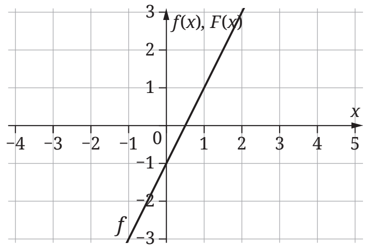


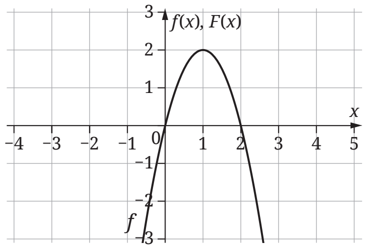
F☐ und F☐

A 4 Skizziere die Graphen zweier Stammfunktionen F_1 und F_2 der Polynomfunktion f.

→ B 1
→ W 1
→ G 2

a)


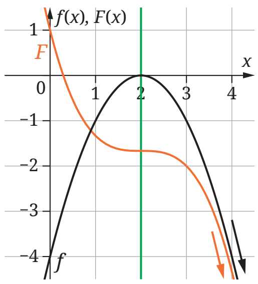
b)


c)


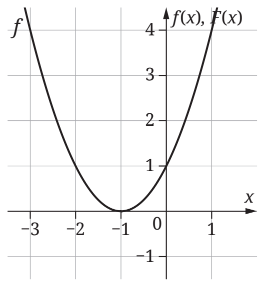
A 5 Gegeben ist der Graph einer quadratischen Funktion f, er berührt die x-Achse. Gib die Stelle an, an der jede Stammfunktion F einen Sattelpunkt besitzen muss und skizziere einen möglichen Graphen von F.

→ B 2

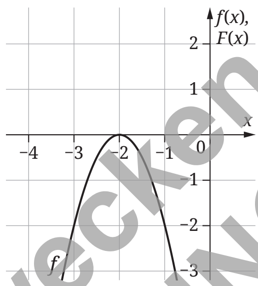
a) Sattelpunkt: $x_s = 2$



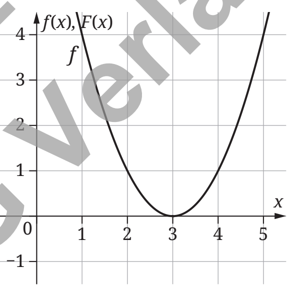
b) Sattelpunkt: x_s =



c) Sattelpunkt: x_s =

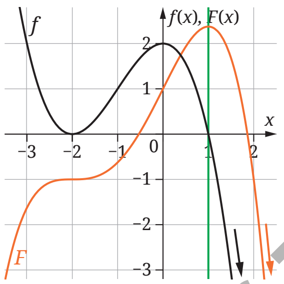


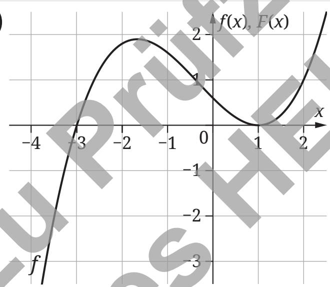
d) Sattelpunkt: x_s =

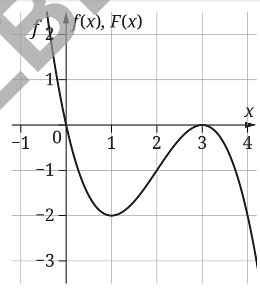


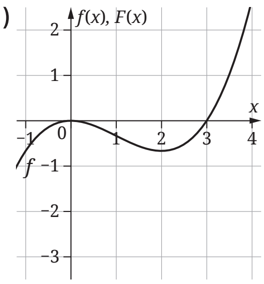
A 6 Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades f. Skizziere einen möglichen Graphen von F.

→ B 2
→ G 1

a)


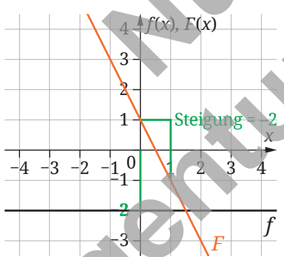
b)


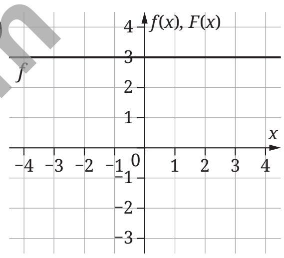
c)


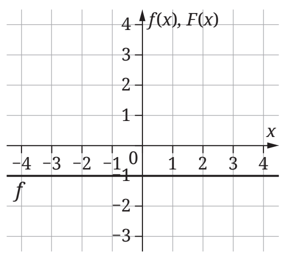
d)


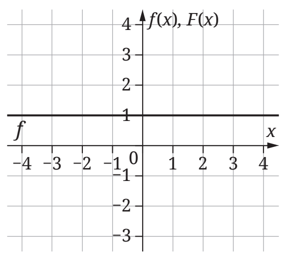
A 7 Skizziere den Graphen einer möglichen Stammfunktion F der abgebildeten konstanten Funktion f.

→ W 2

a)


b)


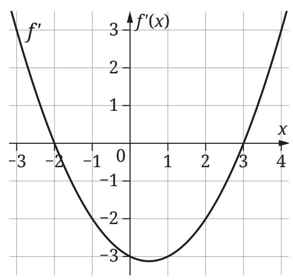
c)


d)


A 8 Gegeben ist der Graph von f', der ersten Ableitung der Polynomfunktion f. Kreuze die zutreffenden Aussagen an.

Tipp Um Eigenschaften der Stammfunktionen einer grafisch gegebenen Funktion zu erkennen, zeichne den Graphen einer Stammfunktion und verschiebe ihn im Kopf nach oben und unten.

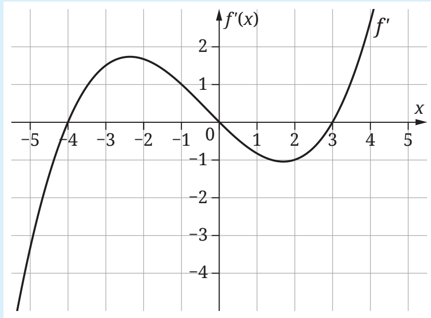
f ist monoton steigend im Intervall [1; 3].	☐
f hat jedenfalls mindestens zwei Nullstellen.	☐
f hat ein lokales Minimum an der Stelle $x = 3$.	☐
Es kann sein, dass f keine Nullstellen besitzt.	☐
f ist monoton steigend für $x < -2$.	☐



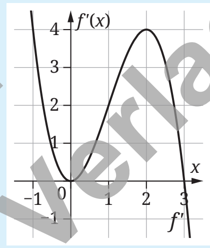
Lösungen

A 9 Gegeben ist der Graph der ersten Ableitung einer Polynomfunktion *f*. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.

Der Graph von *f* hat genau zwei Extrempunkte.	☐
f ist streng monoton steigend für $x > 2$.	☐
Der Graph von *f* hat einen Hochpunkt an der Stelle $x = 0$.	☐
Der Graph von *f* hat zwei Wendepunkte.	☐
f ist eine Polynomfunktion 3. Grades.	☐



A 10 Gegeben ist der Graph der Ableitung *f*′ einer Funktion *f*. Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

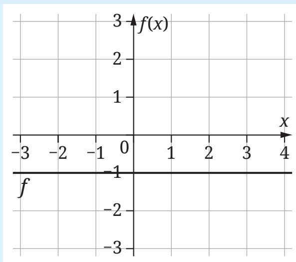


An den Stellen ___①___ besitzt die Funktion *f* ___②___ .

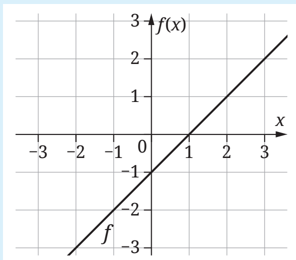
①	
$x = 0$ und $x = 3$	☐
$x = 0$ und $x = 2$	☐
$x = 1$ und $x = 2$	☐

	②
☐	Nullstellen
☐	lokale Extremstellen
☐	Wendestellen

A 11 Gegeben ist der Graph einer Funktion *f*. Zeichne diejenige Stammfunktion von *f* ein, deren Graph durch den Punkt $P = (3\,|\,-1)$ verläuft.



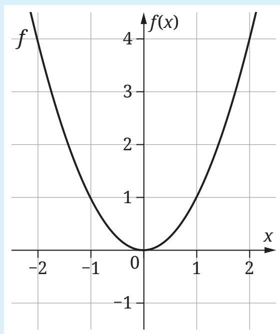
A 12 Gegeben ist der Graph einer Stammfunktion *f*. Zeichne diejenige Stammfunktion von *f* ein, deren Graph durch den Punkt $P = (-1\,|\,1)$ verläuft.



A 13 Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion *f*.

a) Gib an, welchen Grad die Stammfunktionen von *f* haben.
b) Skizziere zwei mögliche Stammfunktionen von *f*.
c) Kreuze die zutreffenden Aussagen an, wenn *F* eine Stammfunktion von *f* ist.

Es gibt Stammfunktionen von *f*, die zwei voneinander verschiedene Nullstellen besitzen.	☐
Jede Stammfunktion von *f* ist monoton steigend in $x \in \mathbb{R}$.	☐
Der Graph jeder Stammfunktion von *f* verläuft durch den Ursprung.	☐
Der Graph jeder Stammfunktion von *f* besitzt einen Sattelpunkt an der Stelle $x = 0$.	☐
Es gibt Stammfunktionen *F* mit der Funktionsgleichung $F(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.	☐



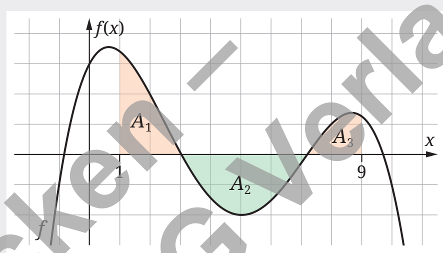
Bestimmtes Integral

Um ein einfaches Ergebnis einer Einnahmen-Ausgaben-Rechnung zu erhalten, z. B. für den privaten Haushalt oder für ein Unternehmen, reicht es, die Daten als Liste in ein Tabellenkalkulationsprogramm einzugeben und den Σ-Button zu drücken. Die Abrechnung wird dann automatisch vom Programm erstellt.
Die „Abrechnung" von Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse geschieht ebenfalls automatisch, und zwar mit dem bestimmten Integral.

Grundlagen

G 1

Das **bestimmte Integral** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ einer Funktion f von a bis b entspricht der Summe der Flächeninhalte zwischen dem Graphen von f und der x-Achse oberhalb der x-Achse minus der Summe der Flächeninhalte unterhalb der x-Achse. Die Stellen a und b werden **Integrationsgrenzen** genannt. Der **Integrand** $f(x)$ gibt an, welche Funktion integriert wird, und am **Differenzial** $\mathrm{d}x$ erkennt man die **Integrationsvariable** (in diesem Fall x).



Beispiel: Das bestimmte Integral der Funktion f von $x = 1$ bis $x = 9$ (siehe Abbildung) ist $\int_1^9 f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3$.

G 2

Der **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung** besagt, dass der Wert des bestimmten Integrals einer Funktion f in $[a; b]$ durch das Einsetzen der Grenzen in eine beliebige Stammfunktion von f berechnet werden kann.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

G 3

Das bestimmte Integral kann schrittweise bestimmt werden, indem man es in zwei oder mehrere Integrale zerlegt. Es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x + \int_z^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

wobei $z \in \mathbb{R}$ eine beliebige Stelle zwischen a und b ist, also $a < z < b$.

G 4

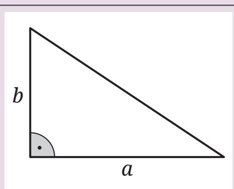
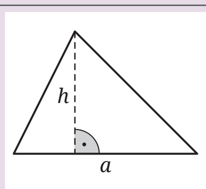
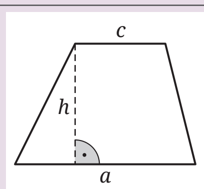
Für das bestimmte Integral gelten die gleichen **Regeln** wie für das unbestimmte Integral.

$$\int_a^b [k \cdot f(x)]\,\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

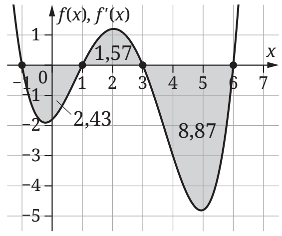
Werkzeuge

W1 Bestehen die Flächenteile zwischen Graph und x-Achse aus einfachen geometrischen Figuren, kann das bestimmte Integral mithilfe der **Flächeninhaltsformeln** bestimmt werden.

Rechtwinkeliges Dreieck	Allgemeines Dreieck	Trapez
		
$A = \frac{a \cdot b}{2}$	$A = \frac{a \cdot h}{2}$	$A = \frac{(a + c) \cdot h}{2}$

Beispiele

B 1 Gegeben ist der Graph einer Funktion f, deren Nullstellen markiert sind. Die Inhalte der Flächenteile zwischen dem Graphen von f und der x-Achse sind im Diagramm angegeben. Bestimme $\int_{-1}^{6} f(x)\,dx$.



Wie ermittle ich den Wert eines bestimmten Integrals, wenn die Inhalte der vom Graphen und der x-Achse eingeschlossenen Flächen bekannt sind?

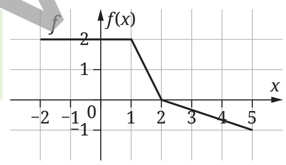
1 **Erkennen, welche Flächeninhalte addiert und welche subtrahiert werden müssen**

Der Flächeninhalt 1,57 muss addiert werden, da die Fläche oberhalb der x-Achse liegt.
Die Flächeninhalte 2,43 und 8,87 müssen subtrahiert werden, da die Flächen unterhalb der x-Achse liegen.

2 **Das bestimmte Integral aus den gegebenen Flächeninhalten berechnen**

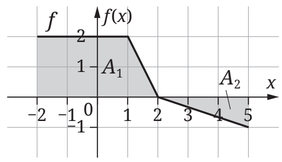
$\int_{-1}^{6} f(x)\,dx = -2{,}43 + 1{,}57 - 8{,}87 = -9{,}73$

B 2 Gegeben ist der Graph der Funktion f. Gib den Wert des bestimmten Integrals $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$ an.



Wie ermittle ich den Wert eines bestimmten Integrals mithilfe von Flächenformeln für geometrische Figuren?

1 **Alle Flächen zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse im gegebenen Intervall schraffieren, durchnummerieren und ihre Inhalte mit den passenden Flächenformeln berechnen**



A_1 … Trapez $\Longrightarrow A_1 = \frac{(4+3)\cdot 2}{2} = 7$ A_2 … Dreieck $\Longrightarrow A_2 = \frac{3\cdot 1}{2} = 1{,}5$ (→ W1)

2 **Das bestimmte Integral als Summe der schraffierten Flächen angeben, dabei Flächen oberhalb der x-Achse addieren und Flächen unterhalb der x-Achse subtrahieren**

$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = A_1 - A_2 = 7 - 1{,}5 = 5{,}5$

B 3 Gegeben ist die Funktion $f(x) = 0{,}5x$. Bestimme $a \in \mathbb{R}^+$ so, dass $\int_0^a f(x)\,dx = 1$ ergibt.

Wie ermittle ich eine Integrationsgrenze, wenn der Wert eines bestimmen Integrals gegeben ist?

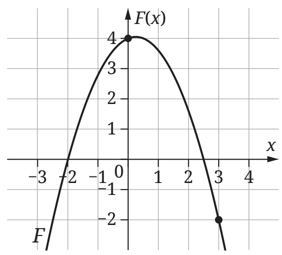
1 **Das Integral berechnen und den erhaltenen Ausdruck vereinfachen**

$\int_0^a 0{,}5x\,dx = 0{,}25x^2\Big|_0^a = 0{,}25a^2$

2 **Den berechneten Term mit dem Wert des bestimmten Integrals gleichsetzen und die Gleichung lösen**

$0{,}25a^2 = 1 \Longrightarrow a = 2$ (Die zweite Lösung $a = -2$ kann wegen der Vorgabe $a > 0$ ignoriert werden.)

B 4 Gegeben ist der Graph einer Stammfunktion F von f. Berechne $\int_0^3 f(x)\,dx$.



Wie ermittle ich den Wert eines bestimmten Integrals einer Funktion f, wenn der Graph einer Stammfunktion F gegeben ist?

1 **Das bestimmte Integral in der Form $F(b) - F(a)$ aufschreiben**

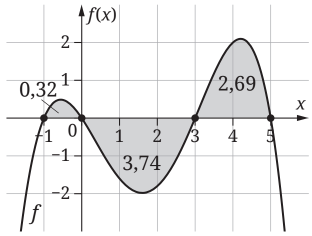
$\int_0^3 f(x)\,dx = F(3) - F(0)$ (→ G2)

2 **$F(a)$ und $F(b)$ als y-Koordinaten aus dem Graphen ablesen und in den Ausdruck einsetzen**

$F(0) = 4$ und $F(3) = -2$, daher ist $\int_0^3 f(x)\,dx = -2 - 4 = -6$

Aufgaben zu den Beispielen

B 1 A Gegeben ist der Graph einer Funktion f, deren Nullstellen markiert sind. Die Inhalte der Flächenteile zwischen dem Graphen von f und der x-Achse sind im Diagramm angegeben. Bestimme $\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.



1 **Erkennen, welche Flächeninhalte addiert und welche subtrahiert werden müssen**

Die Flächeninhalte ___ und ___ müssen ___ werden,

da die Flächen ___ der x-Achse liegen.

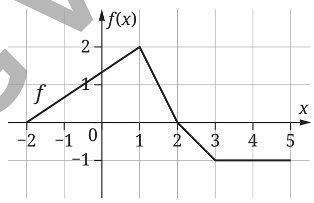
Der Flächeninhalt ___ muss ___ werden, da die Fläche

___ der x-Achse liegt.

2 **Das bestimmte Integral aus den gegebenen Flächeninhalten berechnen**

$\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x =$ ___ ___ ___ ___ ___ ___ $=$ ___

B 2 A Gegeben ist der Graph der Funktion f. Gib den Wert des bestimmten Integrals $\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ an.



1 **Alle Flächen zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse im gegebenen Intervall schraffieren, durchnummerieren und ihre Inhalte mit den passenden Flächenformeln berechnen**

A_1 … ___ $\Rightarrow A_1 =$ ___

A_2 … ___ $\Rightarrow A_2 =$ ___

2 **Das bestimmte Integral als Summe der schraffierten Flächen angeben, dabei Flächen oberhalb der x-Achse addieren und Flächen unterhalb der x-Achse subtrahieren**

$\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = A_{\_\_}$ ___ $A_{\_\_} =$ ___ ___ ___ $=$ ___

B 3 A Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2$. Bestimme $a \in \mathbb{R}^+$ so, dass $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 27$ ergibt.

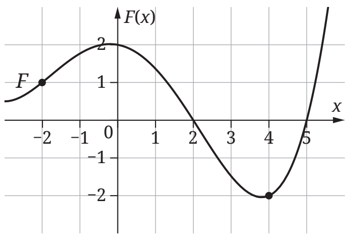
1 **Das Integral berechnen und den erhaltenen Ausdruck vereinfachen**

$\int_{\_\_}^{\_\_}$ ___ $\mathrm{d}x =$ ___ $\Big|_{\_\_}^{\_\_} =$ ___

2 **Den berechneten Term mit dem Wert des bestimmten Integrals gleichsetzen und die Gleichung lösen**

___ $=$ ___ $\Rightarrow a =$ ___

B 4 A Gegeben ist der Graph einer Stammfunktion F von f. Berechne $\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.



1 **Das bestimmte Integral in der Form $F(b) - F(a)$ aufschreiben**

$\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = F($ ___ $) - F($ ___ $)$

2 **$F(a)$ und $F(b)$ als y-Koordinaten aus dem Graphen ablesen und in den Ausdruck einsetzen**

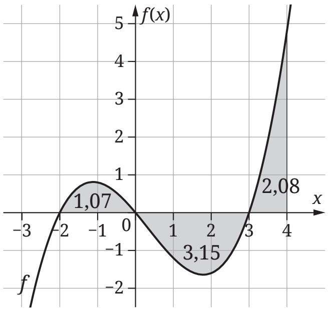
$F($ ___ $) =$ ___ und $F($ ___ $) =$ ___, daher ist $\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x =$ ___ $-$ ___ $=$ ___

Lösungen | Weitere Aufgaben

Aufgaben

A 1
→ B 1
→ G 1

Gegeben sind der Graph einer Funktion f sowie die Inhalte von Flächenteilen, die der Graph mit der x-Achse einschließt.
Ermittle den Wert des bestimmten Integrals.



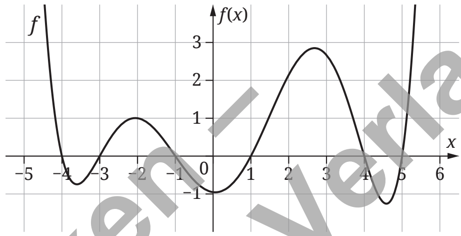
a) $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx =$ ___ d) $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx =$ ___

b) $\int_{0}^{3} f(x)\,dx =$ ___ e) $\int_{0}^{4} f(x)\,dx =$ ___

c) $\int_{3}^{4} f(x)\,dx =$ ___ f) $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx =$ ___

A 2

Schätze anhand der Größen der Flächenteile zwischen Graph und x-Achse ab, ob der Wert des gegebenen bestimmten Integrals positiv, negativ oder gleich null ist, und setze das entsprechende Zeichen (<, > oder =) ein. Alle Nullstellen von f sind ganzzahlig.



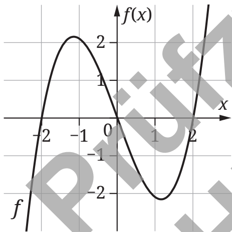
a) $\int_{-4}^{-3} f(x)\,dx$ ○ 0 d) $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$ ○ 0

b) $\int_{-4}^{-1} f(x)\,dx$ ○ 0 e) $\int_{2}^{4} f(x)\,dx$ ○ 0 g) $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ ○ 0

c) $\int_{-4}^{1} f(x)\,dx$ ○ 0 f) $\int_{-1}^{1{,}5} f(x)\,dx$ ○ 0 h) $\int_{-4}^{5} f(x)\,dx$ ○ 0

A 3

Gegeben ist der Graph einer Funktion f mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Setze <, = oder > so ein, dass eine wahre Aussage entsteht.

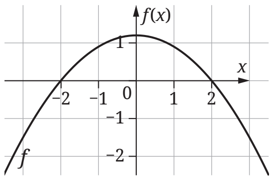


Tipp Sowohl bei Funktionen mit $f(-x) = -f(x)$ (**punktsymmetrisch** zum Ursprung) als auch bei Funktionen mit $f(-x) = f(x)$ (**achsensymmetrisch** bezüglich der y-Achse) sind einander entsprechende Flächenteile links und rechts von der y-Achse gleich groß.

a) $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$ ○ 0 b) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ ○ 0 c) $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$ ○ 0 d) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ ○ 0

A 4

Gegeben ist der Graph einer Funktion f mit $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Setze <, = oder > so ein, dass eine wahre Aussage entsteht.



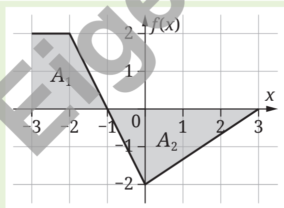
a) $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$ ○ $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$ c) $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$ ○ $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$

b) $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$ ○ $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ d) $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$ ○ $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$

A 5
→ B 2
→ W 1

Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Bestimme $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$.

a)

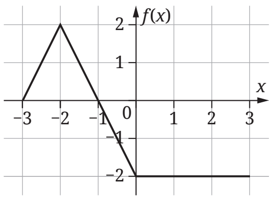


$A_1 = \frac{(2+1)\cdot 2}{2} = 3$

$A_2 = \frac{4\cdot 2}{2} = 4$

$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 3 - 4 = -1$

b)

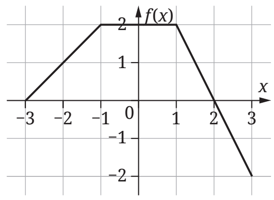


$A_1 = \frac{\_\_\_ \cdot \_\_\_}{\_\_\_} =$ ___

$A_2 = \frac{(\_\_\_ + \_\_\_)\cdot \_\_\_}{\_\_\_} =$ ___

$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx =$ ___ ○ ___ = ___

c)



$A_1 = \frac{(\_\_\_ + \_\_\_)\cdot \_\_\_}{\_\_\_} =$ ___

$A_2 = \frac{\_\_\_ \cdot \_\_\_}{\_\_\_} =$ ___

$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx =$ ___ ○ ___ = ___

A 6 → G 2

Berechne den Wert des bestimmten Integrals.

a) $\int_1^2 4x^2\,\mathrm{d}x = 4 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = 4 \cdot \frac{2^3}{3} - \left(4 \cdot \frac{1^3}{3}\right) = \frac{28}{3}$

b) $\int_1^3 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\square}}{\square}\Big|_{\square}^{\square} = \frac{\square}{\square} - \left(\frac{\square}{\square}\right) = \square$

c) $\int_{-1}^2 5x\,\mathrm{d}x =$ __________

d) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x =$ __________

e) $\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x =$ __________

f) $\int_{-\pi}^0 \cos(x)\,\mathrm{d}x =$ __________

A 7 T!

Berechne den Wert des bestimmten Integrals mittels Technologieeinsatz.

a) $\int_{-1}^0 x \cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ b) $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^3 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x) \cdot \cos(x)]\,\mathrm{d}x$ e) $\int_1^2 2^{3x}\,\mathrm{d}x$

A 8 → B 3 T!

Bestimme die Zahl a, $a \in \mathbb{R}^+$ so, dass die gegebene Gleichung erfüllt ist.

a) $\int_0^a x\,\mathrm{d}x = 8$

① Integral berechnen

$\frac{x^2}{2}\Big|_0^a = 8$

$\frac{a^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 8$

$a^2 = 16$

② Gleichung lösen

$a = \pm 4$

Da laut Angabe $a > 0$ gilt, ist $a = 4$ die einzige Lösung.

b) $\int_1^a 6x\,\mathrm{d}x = 9$ c) $\int_0^a 3x^2\,\mathrm{d}x = 27$ d) $\int_0^1 a \cdot x^3\,\mathrm{d}x = 5$ e) $\int_{-1}^1 4a \cdot x\,\mathrm{d}x = 16$

A 9 → G 4

Kreuze die beiden Ausdrücke an, die denselben Wert I wie das Integral haben, wobei $a, b \in \mathbb{R}^*$.

a) $I = \int_a^b [2 \cdot f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$

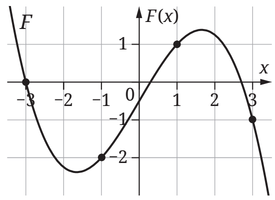
$\int_a^b 2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x - g(x)$	☐
$2 \cdot \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$	☐
$2 \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$2 \cdot \int_a^b \left[f(x) - \frac{1}{2} \cdot g(x)\right]\mathrm{d}x$	☐
$2x \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$	☐

b) $I = \int_0^a (b \cdot x + 1)\,\mathrm{d}x$

$\int_0^a b\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^a x\,\mathrm{d}x + 1$	☐
$\int_0^a b\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^a x\,\mathrm{d}x + a$	☐
$b \cdot \int_0^a x\,\mathrm{d}x + \int_0^a 1\,\mathrm{d}x$	☐
$\frac{a^2 \cdot b}{2} + a$	☐
$a \cdot b + 1$	☐

A 10 → B 4

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F der Funktion f. Bestimme den Wert des gegebenen Integrals.



a) $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(1) = -1 - 1 = -2$

b) $\int_{-3}^1 f(x)\,\mathrm{d}x =$ __________

c) $\int_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x =$ __________

d) $\int_{-3}^3 f(x)\,\mathrm{d}x =$ __________

A 11

Die nebenstehende Tabelle enthält einige Wertepaare einer Stammfunktion F der Funktion f. Bestimme den Wert des gegebenen Integrals.

x	−1	0	2	5	8
$F(x)$	3	1	−4	−1	9

a) $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

$F(2) - F(0)$

$= -4 - 1 = -5$

b) $\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ __________

c) $\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x$ __________

d) $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ __________

A 12 Bestimme den Wert des bestimmten Integrals $I = \int_0^3 (-x^2 + 2x - 5)\,\mathrm{d}x$.

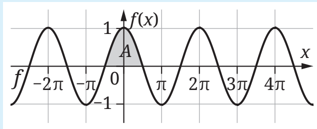
$I =$ ___________

A 13 Bestimme den Wert des Koeffizienten $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Gleichung $\int_0^2 (a \cdot x - 1)\,\mathrm{d}x = 10$ erfüllt ist.

$a =$ ___________

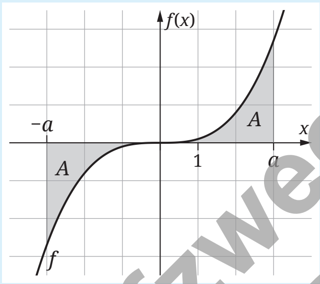
A 14 Gegeben ist eine Funktion f, deren Graph symmetrisch in Bezug auf die y-Achse ist.
Der Inhalt der markierten Fläche beträgt $A = 2$. Bestimme den Wert des Integrals I.

$I = \int_{-2\pi}^{3{,}5\pi} f(x)\,\mathrm{d}x =$ ___________



A 15 Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Beide markierten Flächen haben den gleichen Inhalt A. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.

$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$	☐
$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x < \int_{0}^{a-1} f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_{-a+1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x < \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_{-a}^{a-1} f(x)\,\mathrm{d}x > 0$	☐



A 16 Die nebenstehende Tabelle enthält einige Wertepaare einer Stammfunktion F der Funktion f. Bestimme den Wert des Integrals.

$\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x =$ ___________

x	−2	0	2	4
F(x)	−4	0	3	1

A 17 Von einer Funktion f ist bekannt, dass $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 13$. Bestimme den Wert des bestimmten Integrals I.

$I = \int_0^4 [-2f(x) + 6x]\,\mathrm{d}x =$ ___________

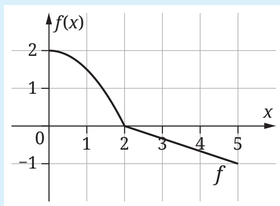
A 18 Gegeben ist eine Funktion f und eine ihrer Stammfunktionen F. Folgendes ist bekannt:

- $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 20$
- $F(1) = 5$

Bestimme den Wert $F(4)$.

$F(4) =$ ___________

A 19 Gegeben ist eine Funktion f, die sich aus zwei Abschnitten zusammensetzt.
Im Intervall $[0; 2]$ ist $f(x) = 2 - 0{,}5x^2$ und im Intervall $[2; 5]$ ist f linear.
Gib die Werte der Integrale an.



a) $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x =$ ___________

b) $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x =$ ___________

c) $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x =$ ___________

Stichwortverzeichnis

A
achsensymmetrisch 22
Alternativhypothese 103
Anfangsgeschwindigkeit 43
Anfangswert (Differenzengleichung) 67
Anteilstest 103
Approximation durch Normalverteilung 93

B
begrenzte/s Wachstum/Abnahme 67
Beschleunigung (Funktion) 43
beschränkte/s Wachstum/Abnahme 67
bestimmtes Integral **19**, 25
Binomialverteilung 93
– Approximation durch Normalverteilung 93

D
Dichtefunktion
– einer Normalverteilung 79
– einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 79
Differenzengleichung 67
Differenzial 19
diskretes Modell 67
Drehellipsoid 37
Drehhyperboloid 37

E
Erlös(funktion) 49
Erwartungswert (Normalverteilung) **73**, 79, 93
Erwartungswert (Hypothesentest) 103

F
Flächeninhalt
– Formeln 19
– zwischen Funktionsgraph und -Achse 25
– zwischen zwei Funktionsgraphen 31

G
Gauß'sche Glockenkurve **73**, 79
Geschwindigkeit (Funktion) 43
Gewinnfunktion 49
grafisches Integrieren 13
Grenze (Differenzengleichung) 67
Grenzerlös(funktion) 49
Grenzkosten(funktion) 49
Grundtypen von Funktionen 55

H
Hauptsatz der Differenzial- und Integral-
rechnung 19
Hypothese(ntest) 103

I
innere Funktion 55
Integral
– als Grenzwert 61
– bestimmtes **19**, 25
– unbestimmtes 7
– zurückgelegter Weg 43
Integrand **19**, 55
Integrationsgrenzen 19
Integrationskonstante 7
Integrationsregeln **7**, 19
– Grundtypen von Funktionen 55
Integrationsvariable 19
Integrieren 7
– grafisches 13
– Regeln 19
Irrtumswahrscheinlichkeit 103

K
Konfidenz(intervall) 97
Kosten(funktion) 49
kritischer Wert (Hypothesentest) 103

L
lineare Differenzengleichung 67
lineare Substitution 55
linksseitiger Test 103

N
Normalverteilung 73
Nullhypothese 103

O
Obersumme 61
Ort (Funktion) 43
Ort zum Zeitpunkt $t = 0$ 43

P
Parameter (Normalverteilung) **73**, 79
partielle Integration 55
punktsymmetrisch 22

Q
Querschnittsfläche eines Körpers 37

R
rechtsseitiger Test 103
relative Häufigkeit (Hypothesentest) 103
Restkapazität 67
Rotationskörper 37

S
schließende Statistik 97
Schranke (Differenzengleichung) 67
Sicherheit (Konfidenzintervall) 97
σ-Umgebung 93
Signifikanzniveau 103
Stammfunktion 7
Standardabweichung (Normalverteilung) **73**, 93
Standardnormalverteilung **73**, 79
Stichprobenumfang (Hypothesentest) 103
Substitution(smethode) 55
Symmetrie (Funktionen) 22
symmetrisches Intervall (um μ) **87**, 93

T
Transformation (Normalverteilung) 73

U
unbegrenzte Änderung 67
unbestimmtes Integral 7
Untersumme 61

V
Verkettung von Funktionen 55
Verteilungsfunktion
- einer Normalverteilung 79
- der Standardnormalverteilung 79

Z
z-Transformation 73
Zufallsvariable (Normalverteilung) 73
zweiseitiger Test 103

LERN- UND ERFOLGREICH ERPROBT TRAININGSSYSTEM

MatheTutor – Dein Begleiter durch die 8. Klasse

Mit deinem **MatheTutor** sind die **Grundkompetenzen** der 8. Klasse kein Problem für dich! Er wiederholt mit dir von Grund auf den wichtigsten Stoff und übt alles ausführlich mit dir – wenn du willst in **mehr als 300 Aufgaben**.

Warum der MatheTutor so gut funktioniert? Er wurde von **Nachhilfe-Profis** entwickelt, die sich richtig gut damit auskennen, Mathematik einfach zu vermitteln. Dafür haben sie sich ein **erfolgreiches Lern- und Trainingssystem** ausgedacht:

1. ***Informiere dich*** zu Beginn jedes Kapitels über benötigte Grundlagen und praktische Werkzeuge für die anstehenden Aufgaben.
2. ***Vollziehe nach***, wie du typische Aufgaben meisterst. Musterbeispiele weisen dir den Weg.
3. ***Probiere selbst*** eine solche Aufgabe zu lösen. Dabei kannst du dich am entsprechenden Musterbeispiel orientieren.
4. ***Trainiere weiter*** und lerne weitere Aufgabentypen kennen, natürlich mit Hilfestellungen. So gewinnst du nach und nach die nötige Sicherheit.
5. ***Teste dich*** selbst anhand von typischen Prüfungsaufgaben – wie bei Schularbeiten und bei der Matura!

Weiters findest du online:

- **Ausführliche Lösungen** mit Hinweisen und Erklärungen – auch zum Technologieeinsatz
- **Zusätzliche *Probiere selbst*-Aufgaben**
- **Alle Modellschritte** an einer Stelle als praktisches Hilfsmittel beim Lernen und Üben

www.helbling.com

HELBLING

ISBN 978-3-99069-170-0

9 783990 691700