MATHE TUTOR

Thomas Benes
Bojan Radenković

7 AHS

Grundkompetenztraining mit System

Technologieeinsatz berücksichtigt

Digitales Zusatzangebot: Kommentierte Lösungen

HELBLING

Digitales Zusatzangebot

Die Lösungen und weitere digitale Zusatzangebote kannst du online über die Helbling-Website abrufen. Ruf dazu www.helbling.com/code auf und gib den Access Code ein (mit einer Münze oder dem Fingernagel freirubbeln).

Bildnachweis
Umschlag Adobe Stock highwaystarz / 7 123RF leklife / 13 123RF artens123 / 17 Adobe Stock Artusius / 23 dreamstime Fottoo / 29 123RF lightfieldstudios / 35 Kommandobrücke: 123RF sdecoret / 35 Stau: 123RF chuyu / 41 123RF olegmalyshev / 45 123RF peshkov / 49 123RF nexusplexus / 55 Röntgen: 123RF thailoei92 / 55 Flur: 123RF sudok1 / 61 123RF entropic / 67 123RF foodandmore / 73 123RF ruslanomega / 79 123RF subbotina / 85 123RF fergregory / 91 123RF baon / 97 123RF puripatch / 103 123RF mathess / 109 123RF cdrewunser / 115 123RF bialasiewicz / 125 123RF cetkauskas / 131 Spielbrett: Adobe Stock Superingo / 131 Boden: 123RF titco / 139 Bühne: 123RF nagaets / 139 Logo: 123RF adibrahman / 145 Erde: 123RF auntspray / 145 Kosmos: 123RF marusja / 151 123RF seventyfour74

MATHETUTOR
7. Klasse AHS

Autorenteam: Thomas Benes, Bojan Radenković
Redaktion: Richard Mesarić
Illustrationen: Georg Flor, Wien
Umschlaggestaltung: CMS – Cross Media Solutions GmbH, Würzburg
Innenlayout: Nathanaël Gourdin & Katy Müller GbR, Leipzig
Satz: CMS – Cross Media Solutions GmbH, Würzburg
Druck: Athesia Druck, Innsbruck

ISBN 978-3-99069-169-4
1. Auflage: A1[1] 2021

mathewerkstatt

Thomas Benes, Bojan Radenković

MATHETUTOR

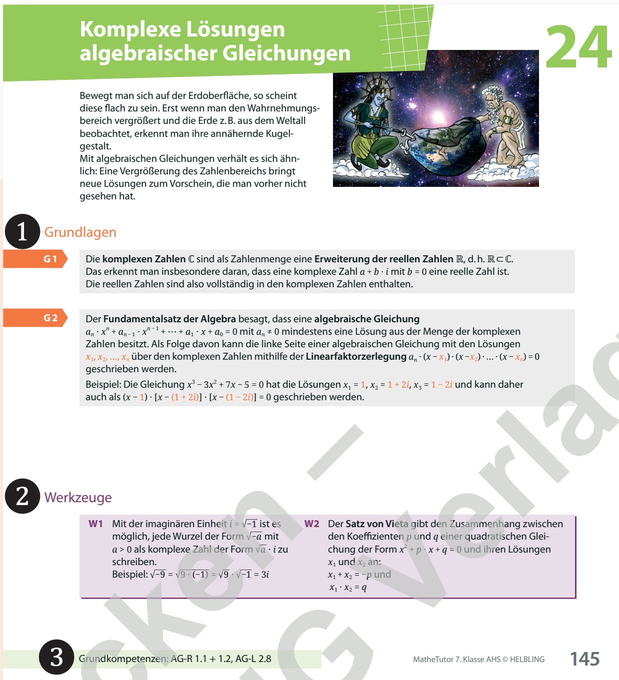
Grundkompetenztraining mit System

7. Klasse AHS

HELBLING

So begleitet dich dein MatheTutor

Ein **Tutor** begleitet durch den Lernprozess und hilft, wenn es schwierig wird.
Dieses Buch ist **dein Tutor** auf dem Weg durch die 7. Klasse und Richtung Mathematik-Matura.



Komplexe Lösungen algebraischer Gleichungen

24

Bewegt man sich auf der Erdoberfläche, so scheint diese flach zu sein. Erst wenn man den Wahrnehmungsbereich vergrößert und die Erde z. B. aus dem Weltall beobachtet, erkennt man ihre annähernde Kugelgestalt.
Mit algebraischen Gleichungen verhält es sich ähnlich: Eine Vergrößerung des Zahlenbereichs bringt neue Lösungen zum Vorschein, die man vorher nicht gesehen hat.

1 Grundlagen

G1 Die **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$ sind als Zahlenmenge eine **Erweiterung der reellen Zahlen** $\mathbb{R}$, d. h. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Das erkennt man insbesondere daran, dass eine komplexe Zahl $a + b \cdot i$ mit $b = 0$ eine reelle Zahl ist.
Die reellen Zahlen sind also vollständig in den komplexen Zahlen enthalten.

G2 Der **Fundamentalsatz der Algebra** besagt, dass eine **algebraische Gleichung** $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$ mit $a_n \neq 0$ mindestens eine Lösung aus der Menge der komplexen Zahlen besitzt. Als Folge davon kann die linke Seite einer algebraischen Gleichung mit den Lösungen $x_1, x_2, \dots, x_n$ über den komplexen Zahlen mithilfe der **Linearfaktorzerlegung** $a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) = 0$ geschrieben werden.
Beispiel: Die Gleichung $x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + 2i$, $x_3 = 1 - 2i$ und kann daher auch als $(x - 1) \cdot [x - (1 + 2i)] \cdot [x - (1 - 2i)] = 0$ geschrieben werden.

2 Werkzeuge

W1 Mit der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$ ist es möglich, jede Wurzel der Form $\sqrt{-a}$ mit $a > 0$ als komplexe Zahl der Form $\sqrt{a} \cdot i$ zu schreiben.
Beispiel: $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$

W2 Der **Satz von Vieta** gibt den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten p und q einer quadratischen Gleichung der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$ und ihren Lösungen x_1 und x_2 an:
$x_1 + x_2 = -p$ und
$x_1 \cdot x_2 = q$

3 Grundkompetenzen: AG-R 1.1 + 1.2, AG-L 2.8

MatheTutor 7. Klasse AHS © HELBLING 145

1 Informiere dich

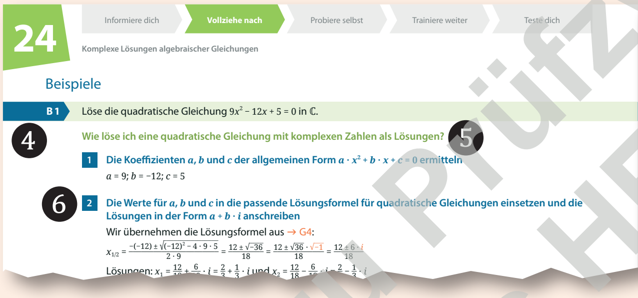
Ein **kurzer Text** stimmt dich auf das Kapitel ein.

Die **Grundlagen** ❶ benötigst du im ganzen Kapitel. Lerne oder wiederhole sie, bevor du loslegst.

Praktische **Werkzeuge** ❷ stehen dir für einzelne Aufgaben oder Lösungsschritte zur Verfügung. Dein MatheTutor weist dich darauf hin, wenn es sinnvoll ist, sie einzusetzen.

Du erfährst hier auch, welche **Grundkompetenzen** ❸ du in diesem Kapitel trainierst.

2 Vollziehe nach



24 Informiere dich | Vollziehe nach | Probiere selbst | Trainiere weiter | Teste dich

Komplexe Lösungen algebraischer Gleichungen

Beispiele

B1 Löse die quadratische Gleichung $9x^2 - 12x + 5 = 0$ in $\mathbb{C}$.

4 Wie löse ich eine quadratische Gleichung mit komplexen Zahlen als Lösungen? 5

1 Die Koeffizienten a, b und c der allgemeinen Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ ermitteln
$a = 9$; $b = -12$; $c = 5$

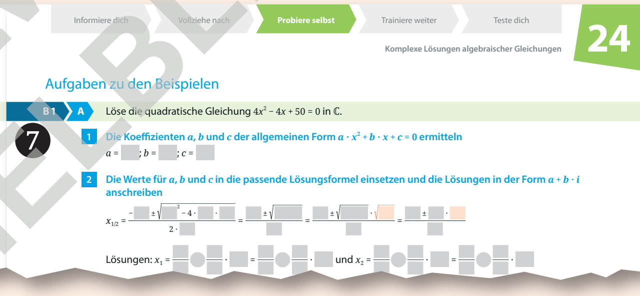
6 2 Die Werte für a, b und c in die passende Lösungsformel für quadratische Gleichungen einsetzen und die Lösungen in der Form $a + b \cdot i$ anschreiben
Wir übernehmen die Lösungsformel aus → G4:
$x_{1/2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 5}}{2 \cdot 9} = \frac{12 \pm \sqrt{-36}}{18} = \frac{12 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{18} = \frac{12 \pm 6 \cdot i}{18}$
Lösungen: $x_1 = \frac{12}{18} + \frac{6}{18} \cdot i = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot i$ und $x_2 = \frac{12}{18} - \frac{6}{18} \cdot i = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot i$

Musterbeispiele ❹ zeigen dir Schritt für Schritt, wie du für das Kapitel typische Aufgaben löst.

Leitfragen ❺ helfen dir zu erkennen, um welche mathematische Fragestellung es sich handelt.

Modellschritte ❻ schlüsseln die Lösung anschaulich auf und unterstützen dich dabei, den Lösungsweg vollständig nachzuvollziehen.

3 Probiere selbst



Informiere dich | Vollziehe nach | Probiere selbst | Trainiere weiter | Teste dich 24

Komplexe Lösungen algebraischer Gleichungen

Aufgaben zu den Beispielen

B1 A Löse die quadratische Gleichung $4x^2 - 4x + 50 = 0$ in $\mathbb{C}$.

7 1 Die Koeffizienten a, b und c der allgemeinen Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ ermitteln
$a = \square$; $b = \square$; $c = \square$

2 Die Werte für a, b und c in die passende Lösungsformel einsetzen und die Lösungen in der Form $a + b \cdot i$ anschreiben
$x_{1/2} = \frac{-\square \pm \sqrt{\square^2 - 4 \cdot \square \cdot \square}}{2 \cdot \square} = \frac{\square \pm \sqrt{\square}}{\square} = \frac{\square \pm \sqrt{\square} \cdot \sqrt{\square}}{\square} = \frac{\square \pm \square \cdot \square}{\square}$
Lösungen: $x_1 = \frac{\square}{\square} \bigcirc \frac{\square}{\square} \cdot \square = \frac{\square}{\square} \bigcirc \frac{\square}{\square} \cdot \square$ und $x_2 = \frac{\square}{\square} \bigcirc \frac{\square}{\square} \cdot \square = \frac{\square}{\square} \bigcirc \frac{\square}{\square} \cdot \square$

Die **Aufgaben zu den Beispielen** ❼ sind wie die Musterbeispiele aufgebaut und ermöglichen es dir, selbst erste Aufgaben zu lösen.

Eine weitere *Probiere selbst*-Seite findest du online.

Hinweise zum Ausfüllen

In kleinen Kästchen trägst du Zahlen oder kurze Terme ein. Achte dabei besonders darauf, keine Vorzeichen oder Klammern zu vergessen.

$4x$ -3 $0{,}25$ (-2)

In großen Kästchen trägst du Zahlen mit vielen (Nachkomma-)Stellen, längere Terme oder Brüche ein.

$-3{,}1416$ $\sqrt{a^2+b^2}$ $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2x^3}$

In Kreisen trägst du Vorzeichen und Operatoren ein, d. h. die Zeichen:
+ – : · < ≥ > ≤ = ≠ ≈ ‖ ⊥ ×

≠ ≥ +

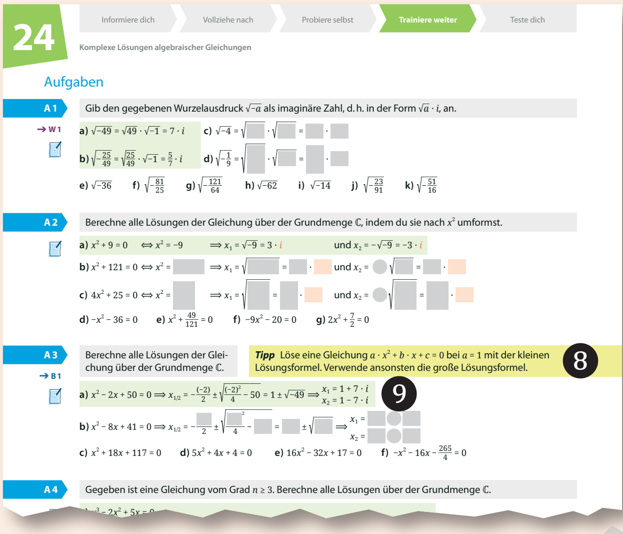
Du kreuzt leere Kästchen an, um die zugehörige Aussage als richtige Lösung zu markieren.

☐ ☒

Auf Schreibzeilen hast du Platz für ganze Rechenzeilen oder Text.

$-2x = -48 \quad |:(-2)$
Der Gewinn beträgt 2,74 Euro.

4 Trainiere weiter


24
Informiere dich | Vollziehe nach | Probiere selbst | Trainiere weiter | Teste dich

Komplexe Lösungen algebraischer Gleichungen

Aufgaben

A 1 Gib den gegebenen Wurzelausdruck $\sqrt{-a}$ als imaginäre Zahl, d. h. in der Form $\sqrt{a} \cdot i$, an.

→ W 1

a) $\sqrt{-49} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{-1} = 7 \cdot i$ c) $\sqrt{-4} = \sqrt{\square} \cdot \sqrt{\square} = \square \cdot \square$

b) $\sqrt{-\frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{25}{49}} \cdot \sqrt{-1} = \frac{5}{7} \cdot i$ d) $\sqrt{-\frac{1}{9}} = \sqrt{\square} \cdot \sqrt{\square} = \square \cdot \square$

e) $\sqrt{-36}$ f) $\sqrt{-\frac{81}{25}}$ g) $\sqrt{-\frac{121}{64}}$ h) $\sqrt{-62}$ i) $\sqrt{-14}$ j) $\sqrt{-\frac{23}{91}}$ k) $\sqrt{-\frac{51}{16}}$

A 2 Berechne alle Lösungen der Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{C}$, indem du sie nach x^2 umformst.

a) $x^2 + 9 = 0 \iff x^2 = -9 \implies x_1 = \sqrt{-9} = 3 \cdot i$ und $x_2 = -\sqrt{-9} = -3 \cdot i$

b) $x^2 + 121 = 0 \iff x^2 = \square \implies x_1 = \sqrt{\square} = \square \cdot \square$ und $x_2 = \square\sqrt{\square} = \square \cdot \square$

c) $4x^2 + 25 = 0 \iff x^2 = \square \implies x_1 = \sqrt{\square} = \square \cdot \square$ und $x_2 = \square\sqrt{\square} = \square \cdot \square$

d) $-x^2 - 36 = 0$ e) $x^2 + \frac{49}{121} = 0$ f) $-9x^2 - 20 = 0$ g) $2x^2 + \frac{7}{2} = 0$

A 3 Berechne alle Lösungen der Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{C}$.

Tipp Löse eine Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ bei $a = 1$ mit der kleinen Lösungsformel. Verwende ansonsten die große Lösungsformel. 8

→ B 1

a) $x^2 - 2x + 50 = 0 \implies x_{1/2} = -\frac{(-2)}{2} \pm \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} - 50} = 1 \pm \sqrt{-49} \implies x_1 = 1 + 7 \cdot i,\ x_2 = 1 - 7 \cdot i$ 9

b) $x^2 - 8x + 41 = 0 \implies x_{1/2} = -\frac{\square}{2} \pm \sqrt{\frac{\square^2}{4} - \square} = \square \pm \sqrt{\square} \implies x_1 = \square\,\square\,\square,\ x_2 = \square\,\square\,\square$

c) $x^2 + 18x + 117 = 0$ d) $5x^2 + 4x + 4 = 0$ e) $16x^2 - 32x + 17 = 0$ f) $-x^2 - 16x - \frac{265}{4} = 0$

A 4 Gegeben ist eine Gleichung vom Grad $n \geq 3$. Berechne alle Lösungen über der Grundmenge $\mathbb{C}$.

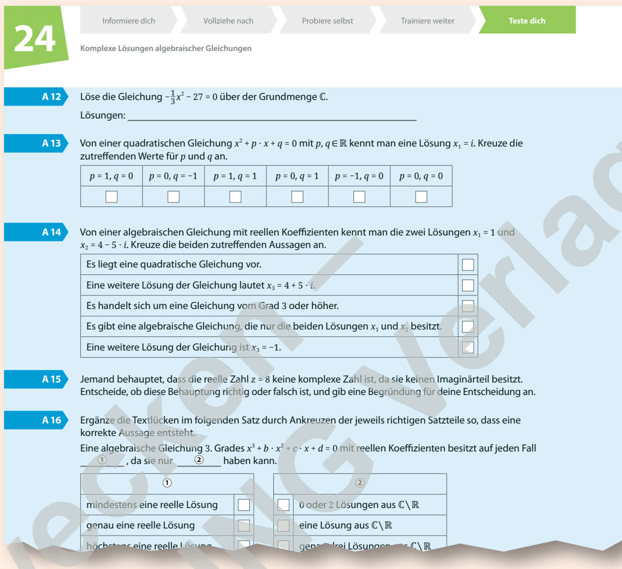
Löse die **Aufgaben** der Reihe nach, sie bauen oft aufeinander auf. Damit trainierst du die Grundkompetenzen des Kapitels.

Die **Tipps** 8 deines MatheTutors solltest du im Hinterkopf behalten.

Musterlösungen 9 sind grün hinterlegt.

Online findest du Lösungen mit Hinweisen und Erklärungen. Lies sie, auch wenn du die Aufgabe richtig gelöst hast. Sie helfen dir oft bei den nächsten Aufgaben.

5 Teste dich


24
Informiere dich | Vollziehe nach | Probiere selbst | Trainiere weiter | Teste dich

Komplexe Lösungen algebraischer Gleichungen

A 12 Löse die Gleichung $-\frac{1}{3}x^2 - 27 = 0$ über der Grundmenge $\mathbb{C}$.

Lösungen: ______________________

A 13 Von einer quadratischen Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ kennt man eine Lösung $x_1 = i$. Kreuze die zutreffenden Werte für p und q an.

$p = 1, q = 0$	$p = 0, q = -1$	$p = 1, q = 1$	$p = 0, q = 1$	$p = -1, q = 0$	$p = 0, q = 0$
☐	☐	☐	☐	☐	☐

A 14 Von einer algebraischen Gleichung mit reellen Koeffizienten kennt man die zwei Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4 - 5 \cdot i$. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.

Es liegt eine quadratische Gleichung vor.	☐
Eine weitere Lösung der Gleichung lautet $x_3 = 4 + 5 \cdot i$.	☐
Es handelt sich um eine Gleichung vom Grad 3 oder höher.	☐
Es gibt eine algebraische Gleichung, die nur die beiden Lösungen x_1 und x_2 besitzt.	☐
Eine weitere Lösung der Gleichung ist $x_3 = -1$.	☐

A 15 Jemand behauptet, dass die reelle Zahl $z = 8$ keine komplexe Zahl ist, da sie keinen Imaginärteil besitzt. Entscheide, ob diese Behauptung richtig oder falsch ist, und gib eine Begründung für deine Entscheidung an.

A 16 Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Eine algebraische Gleichung 3. Grades $x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$ mit reellen Koeffizienten besitzt auf jeden Fall ___①___, da sie nur ___②___ haben kann.

①			②
mindestens eine reelle Lösung	☐	☐	0 oder 2 Lösungen aus $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
genau eine reelle Lösung	☐	☐	eine Lösung aus $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Die letzte Seite jedes Kapitels bietet dir **typische Prüfungsaufgaben, wie bei Schularbeiten und bei der Matura.**

Für diese Seite solltest du immer ein eigenes Blatt für die Erstellung der Lösungen bereithalten.

Auf dieser Seite gibt es keine Hilfestellungen in Form von Tipps und Symbolen mehr.

In den Online-Lösungen findest du auch für diese Seite Hinweise und Erklärungen. Lies sie, auch wenn du die Aufgabe richtig gelöst hast.

Symbole

(Notizblock-Symbol)	Für Zwischenschritte, Nebenrechnungen, Ergebnisse benötigst du hier ein eigenes Blatt.
T	Diese Aufgabe wird durch Technologieeinsatz leichter.
T!	Diese Aufgabe erfordert Technologieeinsatz. Dieser wird in den Lösungen erläutert.
→ **B 2**	Mit dieser Aufgabe wiederholst und festigst du Modellschritte aus einem Musterbeispiel.
→ **G 2**	Diese Aufgabe behandelt eine der Grundlagen aus *Informiere dich*.
→ **W 2**	Hier verwendest du eines der Werkzeuge aus *Informiere dich*. Schlag es bei Bedarf nach.

Online-Angebot

Wie du Zugang zum Online-Angebot erhältst, erfährst du auf der inneren Umschlagseite des MatheTutors.

Lösungen – Lösungen zu allen Aufgaben der aktuellen Seite mit Hinweisen und Erklärungen, auch zum Technologieeinsatz

Weitere Aufgaben – Eine weitere *Probiere selbst*-Seite zum jeweiligen Kapitel. Beschäftige dich bei Bedarf noch intensiver mit den Musterbeispielen.

Modellschritte – Die Modellschritte aus allen Kapiteln in einem Dokument praktisch zusammengefasst, zum Nachschlagen, Lernen und Üben

Inhaltsverzeichnis

Hinweise zur Verwendung von Fachbegriffen

Du findest auf dieser Seite Fachbegriffe, die dir beim Lernen begegnen können, aber im Stichwortverzeichnis des MatheTutors nicht vorkommen.

Dein MatheTutor gebraucht die gleichen mathematischen Fachbegriffe, die auch von deinem Schulbuch, deiner Lehrerin bzw. deinem Lehrer sowie in der schriftlichen Mathematik-Matura verwendet werden. Manchmal gibt es mehrere gleichwertige Ausdrücke für Dasselbe. Da Geschmäcker bekanntlich verschieden sind, kommt es vor, dass Erklärungsbedarf besteht. Es gibt auch Begriffe, die nicht alle einsetzen, weil man die Mathematik sowohl mit diesem Begriff als auch ohne ihn erfolgreich meistern kann.

Damit dadurch keine störenden Missverständnisse auftreten, sind auf dieser Seite Ausdrücke erläutert, die nicht in allen Schulbüchern oder bei allen Lehrerinnen und Lehrern gleich verwendet werden. Wenn du auf einen dieser Begriffe stößt, erfährst du hier, wie du ihn bei der Arbeit mit dem MatheTutor einordnen kannst.

abgeschlossenes Intervall (Kapitel 5–15): ein Intervall, dessen Grenzen zum Intervall gehören (eckige Klammern), z. B. $I = [0; 5]$

Funktionsterm (Kapitel 2–15): der Term in der Funktionsgleichung, der angibt, wie die abhängige Variable aus der unabhängigen errechnet wird, z. B. ist $x^2 - 1$ der Funktionsterm der durch die Funktionsgleichung $f(x) = x^2 - 1$ definierten Funktion.

Ereignisraum (Ergebnisraum) (Kapitel 19): Grundraum Ω

Exponent: Hochzahl

Exzentrizität, lineare (Kapitel 18): Brennweite

gerade Funktion (Kapitel 13): Funktion, deren Graph achsensymmetrisch (bzgl. der y-Achse) ist

Hauptscheitel (Kapitel 18): Die Punkte $A = (a|0)$ und $B = (-a|0)$ einer Ellipse oder Hyperbel, deren Brennpunkte auf der x-Achse liegen

Linearfaktorform (Kapitel 2): Linearfaktorzerlegung

monoton wachsend/streng monoton wachsend (Kapitel 9–12, 14): monoton steigend/streng monoton steigend

Nebenscheitel (Kapitel 18): Die Punkte $C = (0|b)$ und $D = (0|-b)$ einer Ellipse oder Hyperbel, deren Brennpunkte auf der x-Achse liegen

offenes Intervall (Kapitel 5–15): Intervall, dessen Grenzen nicht zum Intervall gehören (runde Klammern), z. B. $I = (0; 5)$

Optimierungsaufgabe (Kapitel 15): Extremwertaufgabe

Scheitel(punkt) (Kapitel 18):
einer Parabel: der Schnittpunkt der Parabel mit ihrer Symmetrieachse
einer Ellipse oder Hyperbel siehe *Hauptscheitel* und *Nebenscheitel*

Terrassenpunkt, -stelle (Kapitel 8): Sattelpunkt, -stelle

Termdarstellung einer Funktion (Kapitel 2–15): Funktionsgleichung in der Form $f(x) = Funktionsterm$, z. B. $f(x) = x^2 - 1$

ungerade Funktion (Kapitel 13): Funktion, deren Graph punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs $(0|0)$ ist

Wahrscheinlichkeitsfunktion (Kapitel 20, 22): Wahrscheinlichkeitsverteilung

Tipps und Hinweise zu den Aufgaben

Zwei wichtige Tipps für das Lösen der Aufgaben

Verwende die Lösungen, um etwaige Unklarheiten zu beseitigen. Tu das aber erst, nachdem du die Aufgabe selbstständig probiert hast.

Skizzen und Nebenrechnungen sind ein wichtiger Bestandteil jeder mathematischen Überlegung. Nimm ein Blatt Papier zur Hand, wenn der Platz im Buch nicht ausreichen sollte.

Aufgabenformate im Teil 1 der Matura

Formate	Hinweise	Beispiele	
Offenes Antwortformat	Formuliere eine Antwort in eigenen Worten, z. B. wenn eine Erklärung, Begründung, längere Rechnung oder Interpretation gefordert ist.	Seite 12	A18
Halboffenes Antwortformat	Ergänze eine teilweise vorgegebene Antwort, z. B. wenn einzelne Werte zu berechnen oder Abbildungen zu ergänzen sind.	Seite 12	A16
Lückentext	Ein Satz mit zwei Lücken ist vorgegeben. Für jede Lücke stehen mögliche Satzteile als Auswahl zur Verfügung. Kreuze jeweils genau einen der drei Satzteile an.	Seite 12	A19
Multiple Choice 2 aus 5	Kreuze die zwei richtigen unter fünf Antwortmöglichkeiten an.	Seite 12	A13
Multiple Choice 1 aus 6	Kreuze die eine richtige unter sechs Antwortmöglichkeiten an.	Seite 22	A16
Zuordnungsformat 4 aus 6	Schreibe in die vier Ausfüllfelder die Buchstaben der richtigen Antworten aus den sechs gegebenen Antwortmöglichkeiten.	Seite 12	A14
Konstruktionsformat	Ergänze die vorgegebene Abbildung durch ein grafisches Element, z. B. Vektoren oder Funktionsgraphen.	Seite 54 Seite 108	A12 A19

Zusätzliche Aufgabenformate in diesem Buch

Formate	Hinweise	Beispiele	
Multiple Choice x aus y	Kreuze die vorgegebene Anzahl an Antwortmöglichkeiten an. z. B. 1 aus 2, 1 aus 4 oder 2 aus 5.	Seite 15 Seite 26	A1 A7
Zuordnungsformat x aus y	Schreibe in alle Ausfüllfelder die Beschriftungen der richtigen Antworten aus den gegebenen Antwortmöglichkeiten.	Seite 10 Seite 27	A6 A13
Ausfüllen	Große Teile der Antwort sind vorgegeben. Ergänze die richtigen Zahlen, Terme, Symbole oder kurzen Texte.	Seite 20 Seite 32	A5 A3
Schritt für Schritt	Löse die Aufgabe in den vorgegebenen Schritten: Fülle Ausfüllkästchen und Schreibzeilen aus, ergänze Abbildungen und kreuze korrekte Aussagen an.	Seite 70 Seite 82	A2 A2

Algebraische Gleichungen

Manche Probleme lassen sich selbst unter noch so großem Einsatz nicht lösen. So führt beispielsweise im berühmten Roman Don Quijote der Titelheld einen aussichtslosen Kampf gegen Windmühlen. Die ersten Menschen, die versucht haben, allgemeine Lösungsformeln für algebraische Gleichungen zu finden, müssen sich ähnlich gefühlt haben wie der arme Don Quijote. Heute weiß man zum Glück, dass es solche Formeln nur für Gleichungen vom Grad ≤ 4 gibt.

Grundlagen

G 1 Eine Gleichung der Gestalt $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$ heißt **algebraische Gleichung** in der Variablen x. Die reellen Zahlen a_i mit $a_n \neq 0$ werden die **Koeffizienten** und die natürliche Zahl n der **Grad** der Gleichung genannt.

G 2 Allgemeine Lösungsmethoden gibt es nur für gewisse Sonderfälle algebraischer Gleichungen. Die folgende Tabelle fasst einige Sonderfälle zusammen.

Sonderfall	$a_n \cdot x^n + a_0 = 0$	$a_n \cdot x^n + \dots + a_i \cdot x^i = 0$ mit $1 \leq i < n$	$a_n \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = 0$
Erkennbar an	Nur die Potenz x^n kommt vor.	kein konstanter Term, d. h. $a_0 = 0$	Produkt mehrerer Klammern
Lösungsmethode	nach x^n umformen, n-te Wurzel ziehen	herausheben und die Faktoren null setzen	jede Klammer null setzen

G 3 Eine algebraische Gleichung vom Grad n hat höchstens n reelle Lösungen. Entspricht die Anzahl der Lösungen dem Grad, so kann die Gleichung $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$ auch in der Form $a_n \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = 0$ mit den Lösungen $x_1, \dots, x_n$ geschrieben werden.

Werkzeuge

W1 **Die Lösungsformel für eine quadratische Gleichung der (großen) Form** $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ lautet $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a}$.

W2 Eine Gleichung der Gestalt $a_n \cdot x^n + a_0 = 0$ kann man durch Umformen lösen: $x = \sqrt[n]{\frac{-a_0}{a_n}}$. Dabei unterscheidet man zwei Fälle.

n ist gerade: Ist die Zahl unter der Wurzel positiv, gibt es zwei reelle Lösungen $x_{1/2} = \pm\sqrt[n]{\frac{-a_0}{a_n}}$.

n ist ungerade: Es gibt immer genau eine reelle Lösung $x = \sqrt[n]{\frac{-a_0}{a_n}}$.

W3 Eine Gleichung der Gestalt $a_n \cdot x^n + \dots + a_i \cdot x^i = 0$ löst man durch Herausheben von x^i. Dabei wird links x^i herausgehoben und in der Klammer wird i von allen Hochzahlen subtrahiert, es entsteht $x^i \cdot (a_n \cdot x^{n-i} + \dots + a_i) = 0$. Anschließend werden beide Faktoren null gesetzt: $x^i = 0$ und $a_n \cdot x^{n-i} + \dots + a_i = 0$

W4 Eine Gleichung der Gestalt $a \cdot x^{2n} + b \cdot x^n + c = 0$ kann mit einer sogenannten **Substitution** gelöst werden. Dabei setzt man $x^n = u$ und $x^{2n} = u^2$ und erhält so die quadratische Gleichung $a \cdot u^2 + b \cdot u + c = 0$.

Grundkompetenz: AG-R 1.2

Beispiele

B 1 Bestimme alle reellen Lösungen der gegebenen Gleichung.
a) $16x^4 - 81 = 0$ **b)** $x^4 - x^2 = 0$ **c)** $(x^3 - 8)(x^2 + 4) = 0$

Wie bestimme ich die Lösungen eines Sonderfalls einer algebraischen Gleichung?

1 Den Sonderfall erkennen und die zugehörige Lösungsmethode auswählen

a) Erkennungsmerkmal:
Nur die Potenz x^4 kommt vor.

Lösungsmethode:
umformen und 4. Wurzel ziehen

b) Erkennungsmerkmal:
kein konstanter Term

Lösungsmethode:
x^2 herausheben und Faktoren null setzen

c) Erkennungsmerkmal:
Produkt zweier Klammern

Lösungsmethode:
beide Klammern null setzen

2 Die Gleichung mit der gewählten Lösungsmethode lösen

a) Wir wenden → W2 an.

$$16x^4 - 81 = 0 \quad |+81$$
$$16x^4 = 81 \quad |:16$$
$$x^4 = \frac{81}{16} \quad |\sqrt[4]{\ }$$
$$x_1 = \frac{3}{2}$$
$$x_2 = -\frac{3}{2}$$

b) Wir wenden → W3 an.

$$x^4 - x^2 = 0$$
$$x^2 \cdot (x^2 - 1) = 0$$
$$x^2 = 0 \quad |\sqrt{\ }$$
$$x_1 = 0$$
und
$$x^2 - 1 = 0 \quad |+1$$
$$x^2 = 1 \quad |\sqrt{\ }$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$

c)

$$(x^3 - 8) \cdot (x^2 + 4) = 0$$
$$x^3 - 8 = 0 \quad |+8$$
$$x^3 = 8 \quad |\sqrt[3]{\ }$$
$$x = 2$$
und
$$x^2 + 4 = 0 \quad |-4$$
$$x^2 = -4 \quad |\sqrt{\ }$$
keine zusätzliche reelle Lösung

B 2 Bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$.

Wie löse ich eine algebraische Gleichung mittels Substitution?

1 Die Substitution $x^n = u$ durchführen

Wir wenden → W4 an: $x^2 = u$ und $x^4 = u^2$. Die Gleichung sieht dann folgendermaßen aus:
$u^2 - 17u + 16 = 0$

2 Die erhaltene quadratische Gleichung in der Variablen u lösen

Wir lesen a, b und c aus der Gleichung ab und setzen die Werte in die Lösungsformel für quadratische Gleichungen ein. (→ W1)

$$\underbrace{1}_{a} \cdot u^2 \underbrace{-17}_{b}u \underbrace{+16}_{c} = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2} \Longrightarrow u_1 = 1,\ u_2 = 16$$

3 Die Lösungen für x aus der Gleichung $x^n = u$ berechnen

Da $n = 2$ gerade ist, erhalten wir zwei mögliche Lösungen für jedes u. (→ W2)

$$u_1 = 1 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Longrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$$
$$u_2 = 16 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{16} \Longrightarrow x_3 = -4,\ x_4 = 4$$

Aufgaben zu den Beispielen

B 1 A Bestimme alle reellen Lösungen der gegebenen Gleichung.

a) $(x^2-9)(2x-1)=0$ **b)** $-x^4+16=0$ **c)** $x^5+27x^2=0$

1 Den Sonderfall erkennen und die zugehörige Lösungsmethode auswählen

a) Erkennungsmerkmal: **b)** Erkennungsmerkmal: **c)** Erkennungsmerkmal:

Lösungsmethode: Lösungsmethode: Lösungsmethode:

2 Die Gleichung mit der gewählten Lösungsmethode lösen

a)
$(x^2-9)\cdot(2x-1)=0$
$\square = \square \quad | \square$
$x^2 = \square \quad | \square$
$x_1 = \square$
$x_2 = \square$
und
$\square = \square \quad | \square$
$\square = \square \quad | \square$
$x_3 = \square$

b)
$-x^4+16=0 \quad | \square$
$-x^4 = \square \quad | \square$
$x^4 = \square \quad | \square$
$x_1 = \square$
$x_2 = \square$

c)
$x^5+27x^2=0$
$x^{\square}\cdot(x^{\square}+\square)=0$
$\square = \square \quad | \square$
$x_1 = \square$
und
$\square = \square \quad | \square$
$\square = \square \quad | \square$
$x_2 = \square$

B 2 A Bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung $x^6-35x^3+216=0$.

1 Die Substitution $x^n=u$ durchführen

Die Substitution ergibt $x^3=\square$ und $x^6=\square$:

$\square - 35\cdot\square + 216 = 0$

2 Die erhaltene quadratische Gleichung in der Variablen u lösen

Es gilt $a=\square$, $b=\square$ und $c=\square$.

$$u_{1/2}=\frac{-(\square)\pm\sqrt{(\square)^2-4\cdot\square\cdot\square}}{2\cdot\square} \Rightarrow u_1=\square,\ u_2=\square$$

3 Die Lösungen für x mittels der Gleichung $x^n=u$ berechnen

Da $n=\square$ ________________ ist, erhalten wir für jedes u __________ mögliche Lösung.

$u_1=8 \Rightarrow x=\sqrt[\square]{\square} \Rightarrow x_1=\square$

$u_2=27 \Rightarrow x=\sqrt[\square]{\square} \Rightarrow x_2=\square$

Lösungen Weitere Aufgaben

Aufgaben

A 1 Löse die gegebene Gleichung durch Umformen nach x.

→ B 1

	Potenz von x isolieren	Wurzelziehen	Lösung(en)
a) $-\frac{1}{5}x^3-25=0$	$-\frac{1}{5}x^3=25 \Leftrightarrow x^3=-125$	$x=\sqrt[3]{-125}$	$x=-5$
b) $-2x^2+8=0$	___ $\cdot\, x^2=$ ___ $\Leftrightarrow x^2=$ ___	$x=\sqrt{}$	$x_1=$ ___, $x_2=$ ___

c) $\frac{7}{6}x^4=\frac{216}{343}$ **d)** $\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{5}=\frac{29}{5}$ **e)** $-3x^3+2=\frac{19}{9}$ **f)** $-\frac{x^6}{2}-4=0$

A 2 Löse die gegebene Gleichung durch Herausheben und Nullsetzen der Klammer.

→ B 1

	Herausheben von x^n	Klammer null setzen	Lösungen
a) $2x^3-\frac{1}{3}x^2=0$	$x^2\cdot\left(2x-\frac{1}{3}\right)=0$	$x^2=0$ und $2x-\frac{1}{3}=0$	$x_1=0,\ x_2=\frac{1}{6}$
b) $-x^4+16x^2=0$	x ___ $\cdot$ (___ x ___ ___ ___) $=0$	x ___ $=$ ___ und ___ x ___ ___ ___ $=$ ___	$x_1=$ ___, $x_2=$ ___, $x_3=$ ___

c) $-3x^7-21x^6=0$ **e)** $-x^3+25x=0$ **g)** $-2x^3=4x^2-6x$ **i)** $-2x^3+7x^2+4x=0$

d) $-\frac{1}{8}x^3=x^6$ **f)** $x^3-4x^2-5x=0$ **h)** $x^3=2x^2+35x$ **j)** $x^4+x=0$

A 3 Bestimme die Lösung der gegebenen Gleichung, indem du jede Klammer einzeln null setzt und die entstehenden Gleichungen löst.

→ B 1

a) $(4x^2-1)(x+5)=0$	$4x^2-1=0$ und $x+5=0$	$x_1=-0{,}5,\ x_2=0{,}5,\ x_3=-5$
b) $(8x^3-27)(-x^2+1)=0$	___ $=$ ___ und ___ $=$ ___	$x_1=$ ___; $x_2=$ ___; $x_3=$ ___

c) $\left(\frac{1}{2}x^4-8\right)(x^2+6)=0$ **d)** $(x-1)(x^2-4)(2x+8)=0$ **e)** $x^3\left(\frac{1}{3}x+4\right)(x-5)^2=0$

A 4 Hebe in der gegebenen Gleichung denjenigen Term heraus, der mehrmals vorkommt. Setze anschließend alle erhaltenen Faktoren gleich null und löse die so entstehenden Gleichungen nach x.

a) $x^2(x+2)-9(x+2)=0$
Der herauszuhebende Term ist $x+2$, die Gleichung lautet dann $(x+2)(x^2-9)=0$.
Die Lösungen der Gleichungen $x+2=0$ und $x^2-9=0$ lauten $x_1=-2,\ x_2=-3,\ x_3=3$.

b) $(x-1)x^2-4(x-1)=0$
Der herauszuhebende Term ist ______________, die Gleichung lautet dann (______________)(___ − ___) = 0.
Die Lösungen der Gleichungen ______________ und ______________ lauten
$x_1=$ ___, $x_2=$ ___, $x_3=$ ___.

c) $x^3(2x-1)+8(2x-1)=0$ **d)** $2(x^2-25)=3x(x^2-25)$

A 5 Löse die gegebene Gleichung.

→ B 2

a) $x^4+2x^2-3=0$

① $\underbrace{u^2}_{x^4}+2\underbrace{u}_{x^2}-3=0$ ② $u_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{matrix} u_1=1 \\ u_2=-3 \end{matrix}$ ③ $x^2=1 \Rightarrow x_{1/2}=\pm 1$; $x^2=-3 \Rightarrow$ Es gibt kein $x_{3/4}$.

b) $-x^4+61x^2-900=0$ **c)** $x^6-63x^3-16=0$ **d)** $\frac{1}{2}x^8-\frac{7}{2}x^4-72=0$

A 6 Ordne den vier Gleichungen jeweils ihre Lösungsmenge L zu.

$(x^2+1)^4=0$	
$x^4+x^2-2=0$	
$x^4+x^2=0$	
$x^3-1=0$	

A	$L=\{0\}$
B	$L=\{1\}$
C	$L=\{-1;1\}$
D	$L=\{\}$

A 7 Kreuze die beiden Gleichungen an, die die angegebene Anzahl an Lösungen besitzen.

→ B1–B2

a) zwei voneinander verschiedene, reelle Lösungen

$\frac{1}{2}x^4+8=0$	☐
$(x-1)^2(x^2+4)=0$	☐
$(x^2-5)^4=0$	☐
$x^3-8=0$	☐
$x^4-2x^2-3=0$	☐

b) genau eine reelle Lösung

$(x-1)(x+2)(x-4)=0$	☐
$x^4=x$	☐
$x^2+9=0$	☐
$(x+1)^3(x^2+9)=0$	☐
$(2x+6)^5=0$	☐

A 8 Berechne die Lösungen der gegebenen Gleichung mittels Technologie und stelle die linke Seite der Gleichung anschließend als ein Produkt von Klammerausdrücken dar.

→ G3

T!

a) $2x^3-8x^2-2x+8=0$
Mittels Technologie erhalten wir die Lösungen $x_1=1$, $x_2=4$, $x_3=-1$.
$\Longrightarrow$ Gleichung: $2(x-4)(x-1)(x+1)=0$

b) $-x^4+13x^3-41x^2-37x+210=0$
Lösungen: $x_1=$ ___, $x_2=$ ___, $x_3=$ ___, $x_4=$ ___
$\Longrightarrow$ Gleichung: $-(x$ ___ ___$)(x$ ___ ___$)(x$ ___ ___$)(x$ ___ ___$)=0$

c) $x^3-21x+20=0$ **d)** $2x^3-11x^2-43x+24=0$ **e)** $-3x^3+7x^2+86x-120=0$

A 9 Gib eine algebraische Gleichung an, die nur die vorgegebenen Lösungen besitzt.

a) Lösungen: $x_1=-2$, $x_2=0$, $x=1$ Gleichung: $(x+2)x(x-1)=0$

b) Lösungen: $x_1=-5$, $x_2=-1$, $x_3=3$ Gleichung: $(x$ ___ ___$)(x$ ___ ___$)(x$ ___ ___$)=0$

c) $x_1=-10$; $x_2=-0{,}5$; $x_3=7$ **d)** $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{3}$ **e)** $x_{1/2}=\pm1$, $x_{3/4}=\pm3$

A 10 Gib eine algebraische Gleichung mit dem gegebenen Grad sowie den vorgegebenen Lösungen an.

→ G3

a) Grad 3, alle Lösungen: $x_1=-1$, $x_2=1$ Gleichung: $(x+1)^2(x-1)=0$ oder $(x+1)(x-1)^2=0$

b) Grad 4, alle Lösungen: $x_1=0$, $x_2=1$ Gleichung: z. B. ___ $\cdot(x-$ ___$)^{\text{___}}=0$

c) Grad 5, alle Lösungen: $x_1=-6$, $x_2=6$ **d)** Grad 6 und einzige Lösung: $x=9$

A 11 Bestimme die Lösungen der gegebenen Gleichung, wobei $a>0$.

→ B1–B2

Tipp Ein Buchstabe (hier a) ungleich der Variablen x steht für eine beliebige (aber nicht veränderliche) reelle Zahl. Um die passende Lösungsmethode zu finden, denkt man sich statt des Buchstabens eine Zahl aus, die die angegebenen Bedingungen erfüllt (hier z. B.: $a=1$ erfüllt $a>0$).

a) $x^4-a=0$ Lösungen: $x_{1/2}=\pm\sqrt[4]{a}$ **c)** $a\cdot x^3-1=0$ **e)** $(a+1)\cdot x^4+2x^2+1=0$

b) $x^3+a=0$ Lösung: $x=$ ___ **d)** $x^3+a\cdot x^2=0$ **f)** $(x+a)^2=0$

A 12 Gegeben ist eine algebraische Gleichung mit $a_0>0$. Bestimme $n\in\mathbb{N}$ so, dass die Gleichung die vorgegebene Anzahl an Lösungen besitzt.

→ G3
→ W2

a) Gleichung: $x^n-a_0=0$, genau eine Lösung n: ungerade

b) Gleichung: $x^n-a_0=0$, genau zwei Lösungen n: ___

c) Gleichung: $x^n+x^2-a_0=0$, höchstens drei Lösungen n ___ ___

d) Gleichung: $x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\cdots a_1\cdot x+a_0=0$, mindestens vier Lösungen n ___ ___

Lösungen

A 13 Kreuze die beiden algebraischen Gleichungen an.

$2x + 3 = 0$	$x^{-2} + x + 1 = 0$	$\sqrt{x} - x + 1 = 0$	$2^x - 1 = 0$	$x^5 = -1$
☐	☐	☐	☐	☐

A 14 Ordne den vier Gleichungen jeweils ihre Lösungsmenge zu.

$(x^4 - 1)(x + 4) = 0$	
$x^4 + 4 = 0$	
$x^5 + 1 = 0$	
$x^3 = 4x^2$	

A	$L = \{-1\}$
B	$L = \{0\}$
C	$L = \{-1; 1; -4\}$
D	$L = \{0; 4\}$
E	$L = \{1; 16\}$
F	$L = \{\,\}$

A 15 Bestimme die reellen Lösungen der Gleichung $(x - a)^2 \cdot (x^2 + b) \cdot (x - c^2) = 0$ mit $a, b, c > 0$.

Lösungen: ____

A 16 Gegeben ist die Gleichung $a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Gib an, wie viele Lösungen diese Gleichung höchstens haben kann.

höchstens __________ Lösungen

A 17 Kreuze alle algebraischen Gleichungen an, deren vollständige Lösung $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ lautet.

$(x^2 - 4)(x + 1) = 0$	☐
$-(x^2 - 4)(x - 1)^2 = 0$	☐
$(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x^2 + 9) = 0$	☐
$(x^2 + 4x + 4)(x - 1) = 0$	☐
$2(x - 2)(x - 1)^2 = 0$	☐

A 18 Gegeben ist die algebraische Gleichung $x^{n+1} + x^n = 0$ mit $n \geq 2$. Begründe, warum die Wahl der Zahl n keinen Einfluss auf die Lösungen der Gleichung hat und bestimme diese Lösungen.

A 19 Wir betrachten algebraische Gleichungen mit der Lösungsmenge $L = \{-3, -2, 2, 3\}$.

Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Eine mögliche Gleichung mit Lösungsmenge L lautet ___①___. Alle Gleichungen mit Lösungsmenge L sind mindestens vom Grad ___②___.

①	
$(x - 3)^2(x - 2)^2 = 0$	☐
$x^4 - 81 = 0$	☐
$(x^2 - 9)(x^2 - 4) = 0$	☐

②	
☐	3
☐	4
☐	5

A 20 Gegeben ist eine algebraische Gleichung $x^n - x^2 + a = 0$.

a) Gib die möglichen Werte für n an für den Fall, dass die Gleichung genau drei Lösungen hat.
b) Bestimme die Lösungen der Gleichung, wenn $n = 4$ und $a = -6$.
c) Es sei $a = 0$. Wie viele reelle Lösungen hat die Gleichung, wenn $n \geq 3$ gerade bzw. ungerade ist?

Nullstellen von Polynomfunktionen

Durch das Zerlegen eines Problems in mehrere einfachere Teilprobleme können oft sehr komplexe Zusammenhänge durchleuchtet und anspruchsvolle Aufgaben Schritt für Schritt gelöst werden.
Ganz ähnlich kann für die Terme vieler Polynomfunktionen eine sogenannte Linearfaktorzerlegung durchgeführt werden, an der die Nullstellen der Funktion direkt ablesbar sind.

Grundlagen

G 1

Eine Funktion der Gestalt $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ heißt eine **Polynomfunktion n-Grades**.

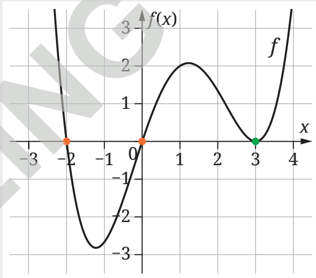
Beispiel: $f(x) = x^4 + x^3 - 13x^2 - x + 12$ ist eine Polynomfunktion 4. Grades.

G 2

Eine Stelle a heißt **Nullstelle** der Funktion f, wenn der Funktionswert $f(a)$ an dieser Stelle gleich null ist, d. h. $f(a) = 0$.

Grafisch erkennt man die Nullstellen einer Funktion als jene Stellen, an denen der Graph die x-Achse schneidet oder berührt.

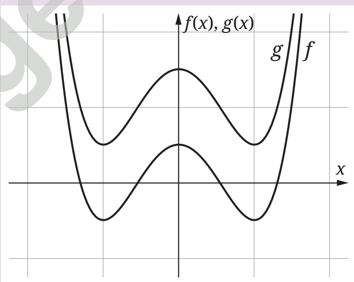
Gilt $f(a) = 0$, so werden häufig sowohl a als auch der zugehörige Punkt $N = (a \mid 0)$ als Nullstelle bezeichnet.



Werkzeuge

W1 Für Polynomfunktionen f vom Grad n gelten folgende Aussagen:
- f besitzt höchstens n Nullstellen.
- Wenn n eine gerade Zahl ist, kann es sein, dass f keine Nullstelle hat.
- Wenn n eine ungerade Zahl ist, hat f mindestens eine Nullstelle.

Beispiel: Die Abbildung zeigt zwei Polynomfunktionen 4. Grades. Der Graph von f hat vier Nullstellen, jener von g keine Nullstelle. Die Graphen von f und g gehen durch Verschieben entlang der y-Achse ineinander über. Durch solche Verschiebungen lassen sich auch Polynomfunktionen mit zwei oder drei Nullstellen finden.



W2 **Abspalten einer gegebenen Nullstelle $x = a$** einer Polynomfunktion n-ten Grades:

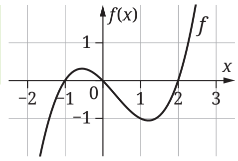
$f(x) = (x - a) \cdot g(x)$, wobei g eine Polynomfunktion vom Grad $n - 1$ ist und $(x - a)$ **Linearfaktor** genannt wird. Durch schrittweises Abspalten aller reellen Nullstellen erhält man $f(x) = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_k) \cdot h(x)$, wobei $h(x)$ keine reellen Nullstellen hat.

Man sagt, f zerfällt vollständig in Linearfaktoren (**Linearfaktorzerlegung**), wenn $f(x) = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$. Sind alle Linearfaktoren voneinander verschieden, so entspricht der Grad von f der Anzahl der Nullstellen = Anzahl der Linearfaktoren.

Beispiel: Die Funktion $f(x) = x^3 - 13x + 12$ besitzt die Nullstelle $x = 1$. f kann in der Form $f(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + x - 12)$ geschrieben werden, $(x - 1)$ ist dabei der abgespaltete Linearfaktor. Darüber hinaus kann $g(x) = x^2 + x - 12$ durch Berechnung der beiden Nullstellen $x = -4$ und $x = 3$ in $g(x) = (x + 4) \cdot (x - 3)$ zerlegt werden. Zusammengefasst ist dann $f(x) = (x - 1) \cdot (x + 4) \cdot (x - 3)$.

Beispiel

B 1 Von einer Polynomfunktion f dritten Grades ist der Graph gegeben. Bestimme eine Funktionsgleichung von f.



Wie bestimme ich aus dem Graphen einer Polynomfunktion ihre Funktionsgleichung, wenn die Anzahl der Nullstellen ihrem Grad entspricht?

1 Alle Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Funktion aus dem Graphen ablesen

Die Nullstellen lauten $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$.

2 Die Funktion als Produkt von Linearfaktoren $f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ schreiben

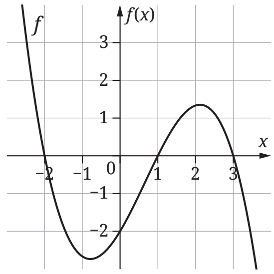
Wir setzen die Nullstellen in die Linearfaktorzerlegung ein und erhalten $f(x) = a_n \cdot (x+1) \cdot x \cdot (x-2)$.

3 Die Koordinaten eines Punktes auf dem Graphen von f (der keine Nullstelle darstellt) ablesen, in die Linearfaktorform einsetzen und die entstehende Gleichung nach a_n auflösen

Wir lesen beispielsweise den Punkt $(1\,|\,-1)$ des Graphen ab.
Einsetzen liefert: $-1 = a_n \cdot (1+1) \cdot 1 \cdot (1-2) \Longrightarrow a_n = 0{,}5$
Funktionsgleichung: $f(x) = 0{,}5 \cdot (x+1) \cdot x \cdot (x-2)$

Aufgabe zum Beispiel

B 1 A Von einer Polynomfunktion f dritten Grades ist der Graph gegeben. Bestimme eine Funktionsgleichung von f.



1 Alle Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Funktion aus dem Graphen ablesen

Die Nullstellen lauten $x_1 =$ ____, $x_2 =$ ____ und $x_3 =$ ____.

2 Die Funktion als Produkt von Linearfaktoren $f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ schreiben

Setze die Nullstellen in die Linearfaktorform ein: $f(x) = a_n \cdot (x$ ____ ____$) \cdot (x$ ____ ____$) \cdot (x$ ____ ____$)$.

3 Die Koordinaten eines Punktes auf dem Graphen von f (der keine Nullstelle darstellt) ablesen, in die Linearfaktorform einsetzen und die entstehende Gleichung nach a_n auflösen

Lies einen Punkt des Graphen ab: (____ | ____)

Einsetzen liefert: ____ $= a_n \cdot ($ ____ $) \cdot ($ ____ $) \cdot ($ ____ $) \Longrightarrow a_n =$ ____

Funktionsgleichung: $f(x) =$ ____

Aufgaben

A 1 → G 1

Kreuze die drei Funktionsgleichungen an, die Polynomfunktionen darstellen.

$f(x) = x^3 + x^{\frac{1}{2}} + 1$	$f(x) = x^2 - x^{-2}$	$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3}$	$f(x) = (x-1)^3$	$f(x) = 3$
☐	☐	☐	☐	☐

A 2 → G 2

Kreuze die Gleichung an, die ausdrückt, dass die Zahl $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ eine Nullstelle der Funktion f ist.

$f(a) = 0{,}1$	$f(0) = a$	$f(a) = f(0)$	$f(0) = f(a) \cdot 0$	$f(a) = 0$	$f(0) = 0$
☐	☐	☐	☐	☐	☐

A 3 → B 1

Gegeben sind die Funktionsgleichung einer Polynomfunktion f sowie ein Punkt P des Graphen von f. Bestimme den Wert des Koeffizienten a.

a) $f(x) = a \cdot (x-1) \cdot (x-3)^2$ und $P = (2 \mid -1)$
Einsetzen von P in f ergibt $-1 = a \cdot (2-1) \cdot (2-3)^2 \Longrightarrow a = -1$.

b) $f(x) = a \cdot (x+3) \cdot x \cdot (x-2)$ und $P = (3 \mid 9)$ **c)** $f(x) = a \cdot x^4 + x^3 + 2x^2 - 8x$ und $P = (2 \mid -8)$

A 4 → W 2

Gegeben ist eine Polynomfunktion f vom Grad n mit den beiden Nullstellen $x = -1$ und $x = 2$. Kreuze die Darstellung(en) der Funktion f an, bei denen ein Linearfaktor richtig abgespaltet wurde. g ist eine passende Polynomfunktion vom Grad $n-1$.

$f(x) = (x-1) \cdot g(x)$	$f(x) = (x-2) \cdot g(x)$	$f(x) = (x+1) \cdot g(x)$	$f(x) = (x+2) \cdot g(x)$	$f(x) = (x+3) \cdot g(x)$
☐	☐	☐	☐	☐

A 5 T! → W 2

Gegeben ist die Polynomfunktion $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$. Zeige, dass $x = -1$ eine Nullstelle von f ist und spalte sie von f ab. Löse die Aufgabe mithilfe von Technologie.

A 6 → W 2

Gegeben ist eine Polynomfunktion, bei der bereits alle Linearfaktoren abgespalten wurden. Bestimme den Grad (durch Ausmultiplizieren), die Anzahl der Linearfaktoren sowie die reellen Nullstelle(n) der Funktion.

a) $f(x) = (x-1)^2 \cdot (x^2 + x + 1)$ Grad f: 4, da $f(x) = x^4 - x^3 - x + 1$
Anzahl der Linearfaktoren: 2, da $(x-1)^2 = (x-1) \cdot (x-1)$
Nullstellen: nur $x = 1$

b) $f(x) = (x+1)^3$ **c)** $f(x) = x \cdot (x-2) \cdot (x^2+1)$ **d)** $f(x) = (x+3)^2 \cdot (x+4)$

A 7 → W 1–W 2

Gegeben ist die Gleichung einer Polynomfunktion f. Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an.

a) $f(x) = (x-4)^2 \cdot (x+1)$

f ist eine Funktion 2. Grades.	☐
f besitzt die Nullstelle $x = 4$.	☐
$f(x) = x^3 - 7x^2 + 28x + 16$	☐
f hat genau n voneinander verschiedene Nullstellen, wobei n der Grad von f ist.	☐
f zerfällt vollständig in Linearfaktoren.	☐

b) $f(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

$f(0)$ ist eine Nullstelle von f.	☐
f besitzt genau drei Nullstellen.	☐
$f(x) = (x+a) \cdot (x+b) \cdot (x+c)$	☐
Es kann sein, dass f für gewisse Werte von a, b und c keine Nullstelle hat.	☐
f besitzt höchstens drei Nullstellen.	☐

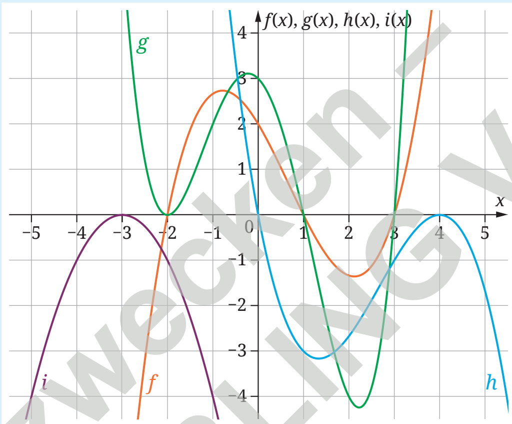
A 8 Kreuze die zutreffenden Aussagen an.

Es gibt keine Polynomfunktion vom Grad 0.	☐
Jede lineare Funktion ist eine Polynomfunktion.	☐
Eine quadratische Funktion ist eine Polynomfunktion vom Grad 2.	☐
Die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^3$ ist eine Polynomfunktion 3. Grades.	☐
Die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{x^4} + 1$ ist eine Polynomfunktion vom Grad 4.	☐

A 9 Ordne den vier abgebildeten Funktionen jeweils ihren Funktionsterm zu.

f	
g	
h	
i	

A	$\frac{1}{3}(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$
B	$-\frac{1}{4}(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$
C	$-(x+3)^2$
D	$\frac{1}{4}(x+2)^2\cdot(x-1)\cdot(x-3)$
E	$\frac{1}{3}(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$
F	$-\frac{1}{3}x\cdot(x-4)^2$



A 10 Bestimme alle Nullstellen der Polynomfunktion $f(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 9\right)\cdot(x-3)^2$.

Nullstellen: ______________________________

A 11 Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.

Eine Polynomfunktion vom Grad 1 hat immer eine Nullstelle.	☐
Eine Polynomfunktion vom Grad 2 hat mindestens zwei Nullstellen.	☐
Es kann sein, dass eine Polynomfunktion 3. Grades keine Nullstelle besitzt.	☐
Es kann sein, dass eine Polynomfunktion 4. Grades keine Nullstelle besitzt.	☐
Eine Polynomfunktion vom Grad $n \geq 2$ hat immer mindestens eine Nullstelle.	☐

A 12 Gegeben ist eine Polynomfunktion $f(x) = x^4 + a$ mit $a > 0$.

Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Von f kann man ___①___ Linearfaktor(en) abspalten, da ___②___.

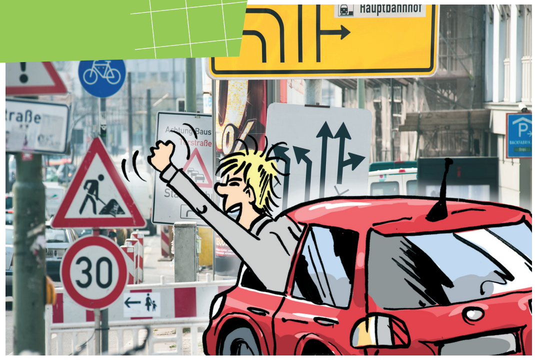
①	
keinen	☐
einen	☐
vier	☐

	②
☐	f den Grad 4 hat
☐	der Graph von f die x-Achse weder berührt noch schneidet
☐	f die Nullstelle $x = -\sqrt[4]{a}$ besitzt

A 13 Gegeben ist eine Polynomfunktion $f(x) = x^4 - 4x^2 + a$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Berechne den Wert a, wenn f die Nullstelle $x = -1$ besitzt.
b) Stelle die Funktion für $a = 0$ als Produkt von Linearfaktoren dar.
c) Finde einen Wert a, für den die Funktion f keine Nullstellen besitzt.

Elementare Ableitungen



Fährt man mit dem Auto durch eine größere Stadt wie z. B. Wien, kann es schon einmal passieren, dass man aufgrund der vielen Verkehrszeichen und der damit einhergehenden Regeln den Überblick verliert. Um beim Ableiten von Funktionen nicht durcheinanderzukommen, starten wir mit ein paar wenigen elementaren Regeln. Zumindest am Anfang ist Ableiten noch einfacher als Autofahren.

Grundlagen

G 1 Mithilfe von Ableitungsregeln erhält man zu einer gegebenen Funktion f ihre **erste Ableitung** f'. Welche Ableitungsregeln benötigt werden, hängt von der gegebenen Funktion ab.

G 2 Mit der **Potenzregel** können Funktionen abgeleitet werden, in denen eine Potenz von x vorkommt. Zwei Spezialfälle ergeben sich für die Potenzen $x^0 = 1$ und $x^1 = x$.

Funktion	Erste Ableitung
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = 1$	$f'(x) = 0$

Beispiel: $f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$

G 3 Eine **additive Konstante** ist eine reelle Zahl (ohne x), die zum Funktionsterm addiert wird.
Eine **multiplikative Konstante** ist eine reelle Zahl, die mit einem Term, der x enthält, multipliziert wird.
Beispiel: Im Funktionsterm $f(x) = 3 \cdot x^2 + 2$ sind 2 die additive Konstante und 3 die multiplikative Konstante.

G 4 **Elementare Ableitungsregeln**

① **Additive** Konstanten: Reelle Zahlen, die zu einem Funktionsterm addiert werden, fallen beim Ableiten weg. $g(x) = f(x) + a$ $(a \in \mathbb{R})$; $g'(x) = f'(x)$

② **Multiplikative** Konstanten: Reelle Zahlen, die mit einem Funktionsterm multipliziert werden, bleiben beim Ableiten unverändert. $g(x) = a \cdot f(x)$ $(a \in \mathbb{R})$; $g'(x) = a \cdot f'(x)$

③ **Summe/Differenz** zweier Funktionen: Summen oder Differenzen von Funktionstermen können einzeln abgeleitet werden. $h(x) = f(x) + g(x)$, $h'(x) = f'(x) + g'(x)$; $h(x) = f(x) - g(x)$, $h'(x) = f'(x) - g'(x)$

G 5 Der Buchstabe zwischen den Klammern in der Schreibweise $f(x)$ wird **unabhängige Variable** der Funktion genannt, z. B. ist bei $f(z)$ die unabhängige Variable z, sie übernimmt die Rolle von x.

Werkzeuge

W1 Bestimmte Terme können als Potenzen dargestellt werden:

$\frac{a}{x^n} = a \cdot x^{-n}$ $(n \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*)$ $\qquad$ $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ $(n \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^+)$

Beispiele

B 1 Gegeben ist die Polynomfunktion $f(x) = x^5 - 3x^2 + 8x + 4$. Bilde die erste Ableitung von f.

Wie leite ich eine Polynomfunktion ab?

1 **Die Potenzen x^n mit der Potenzregel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ ableiten**

$$f'(x) = \overbrace{5x^{5-1}}^{(x^5)'} - 3 \cdot \overbrace{2x^{2-1}}^{(x^2)'} + 8 \cdot \overbrace{1}^{(x)'} + \overbrace{0}^{(4)'}$$

2 **Die Ableitungsfunktion vereinfachen**

$$f'(x) = 5x^4 - 6x + 8$$

B 2 Gegeben ist die Funktion f. Bilde die erste Ableitung von f.
a) $f(x) = 4x^2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^5}$ **b)** $f(x) = 6\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}$

Wie leite ich eine Summe von Potenzfunktionen ab?

1 **Die einzelnen Terme der Funktion in Potenzschreibweise, d. h. in der Form x^n, angeben**

Wir verwenden → W1, um Brüche und Wurzelausdrücke in der Potenzschreibweise darzustellen.

$f(x) = 4x^2 - 3x^{-1} + 4x^{-5}$ $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}}$

2 **Die Potenzen x^n mit der Potenzregel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ ableiten**

$f'(x) = 4 \cdot 2x^{2-1} - 3 \cdot (-1) \cdot x^{-1-1} + 4 \cdot (-5) \cdot x^{-5-1}$ $f'(x) = 6 \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}$

3 **Die Ableitungsfunktion vereinfachen**

$f'(x) = 8x + 3x^{-2} - 20x^{-6}$ $f'(x) = 3x^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

B 3 Bilde die erste Ableitung der gegebenen Funktion.
a) $A(t) = \frac{5t^2}{r} - s^3$ **b)** $A(s) = \frac{5t^2}{r} - s^3$ **c)** $A(r) = \frac{5t^2}{r} - s^3$

Wie leite ich eine Funktion nach einer bestimmten Variablen ab?

1 **Die unabhängige Variable im Funktionsterm markieren**

Die markierte Variable übernimmt die Rolle von x (→ G5), d. h. wir werden nach dem markierten Buchstaben ableiten, so wie wir das bis jetzt mit x gemacht haben.

a) $A(t) = \frac{5t^2}{r} - s^3$
Ableiten nach t

b) $A(s) = \frac{5t^2}{r} - s^3$
Ableiten nach s

c) $A(r) = \frac{5t^2}{r} - s^3$
Ableiten nach r

2 **Additive und multiplikative Konstanten identifizieren**

a) additive Konstante: $-s^3$
multiplikative Konstante: $\frac{5}{r}$

b) additive Konstante: $\frac{5t^2}{r}$
multiplikative Konstante: keine

c) additive Konstante: $-s^3$
multiplikative Konstante: $5t^2$

3 **Die entsprechende elementare Ableitungsregel auf die unabhängige Variable anwenden**

a) $A'(t) = \frac{5 \cdot \overbrace{2t}^{(t^2)'}}{r} = \frac{10t}{r}$

b) $A'(s) = -\overbrace{3s^2}^{(s^3)'}$

c) Wir schreiben zuerst $\frac{1}{r}$ als r^{-1} (→ W1):
$A(r) = 5t^2 \cdot r^{-1} - s^3$
$A'(r) = 5t^2 \cdot \overbrace{(-1) \cdot r^{-2}}^{(r^{-1})'} = -5t^2 \cdot r^{-2}$

Aufgaben zu den Beispielen

B 1 **A** Gegeben ist die Polynomfunktion $f(x) = x^4 + 5x^3 - 3x - 1$. Bilde die erste Ableitung von f.

1 **Die Potenzen x^n mit der Potenzregel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ ableiten**

$f'(x) = \quad \cdot x \quad 5 \cdot \quad \cdot x \quad \cdot$

2 **Die Ableitungsfunktion vereinfachen**

$f'(x) = \quad x \quad x$

B 2 **A** Gegeben ist die Funktion f. Bilde die erste Ableitung von f.

a) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{5}{x^4}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$

1 **Die einzelnen Terme der Funktion in Potenzschreibweise, d. h. in der Form x^n, angeben**

$f(x) = 2x \quad - 5x$

$f(x) = x \quad + x$

2 **Die Potenzen x^n mit der Potenzregel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ ableiten**

$f'(x) = 2 \cdot (\quad) x \quad - 5 \cdot (\quad) \cdot x$

$f'(x) = \quad x \quad + \quad x$

3 **Die Ableitungsfunktion vereinfachen**

$f'(x) = \quad x \quad x$

$f'(x) = \quad x \quad x$

B 3 **A** Bilde die erste Ableitung der gegebenen Funktion.

a) $F(x) = \frac{-2x^4}{z^2} + y$ **b)** $F(y) = \frac{-2x^4}{z^2} + y$ **c)** $F(z) = \frac{-2x^4}{z^2} + y$

1 **Die Variable, nach der abgeleitet werden soll, im Funktionsterm markieren**

a) $F(x) = \frac{-2x^4}{z^2} + y$

ableiten nach

b) $F(y) = \frac{-2x^4}{z^2} + y$

ableiten nach

c) $F(z) = \frac{-2x^4}{z^2} + y$

ableiten nach

2 **Additive und multiplikative Konstanten identifizieren**

additive Konstante:

multiplikative Konstante:

additive Konstante:

multiplikative Konstante: ____________

additive Konstante:

multiplikative Konstante:

3 **Den Term mit der Variablen, nach der abgeleitet wird, mit der Potenzregel ableiten**

$F'(x) =$ ____________

$F'(y) =$ ____________

Forme zuerst auf Potenzschreibweise um:

$F(z) = -2x^4 \cdot \quad + y$

$F'(z) =$ ____________

Lösungen

Weitere Aufgaben

Aufgaben

A 1 Bilde die erste Ableitung der Polynomfunktion.

→ B1 → G4

a) $f(x) = 4x^3 - \frac{3x^2}{4} + \frac{7x}{3} - 1$ $f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - \frac{3 \cdot 2x}{4} + \frac{7}{3} = 12x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{7}{3}$

b) $f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 1}{6}$ Wir schreiben $f(x) = \frac{1}{6} \cdot (3x^2 - 12x + 1)$ und beachten → G4:
$f'(x) = \frac{1}{6} \cdot (6x - 12) = x - 2$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ **e)** $f(x) = -\frac{3}{5}x^5 + \frac{6x^3}{7} + 5$ **g)** $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{2}$ **i)** $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 5x)$

d) $f(x) = -4x^2 + 3x + 8$ **f)** $f(x) = 2(x^2 - 7x + 12)$ **h)** $f(x) = \frac{-x^4 + 3x^2 - x}{3}$ **j)** $f(x) = \frac{3x^2}{4} - x$

A 2 Bilde die erste Ableitung der gegebenen Summe von Potenzfunktionen.

→ B2

a) $f(x) = \frac{4}{x} - \frac{5}{2x^2}$ $f(x) = 4x^{-1} - \frac{5}{2}x^{-2}$
$f'(x) = 4 \cdot (-1) \cdot x^{-2} - \frac{5}{2} \cdot (-2) \cdot x^{-3} = -4x^{-2} + 5x^{-3} = -\frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}$

b) $f(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ $f(x) = \square \cdot x^{\square} + x^{\square}$
$f'(x) = \square \cdot \square \cdot x^{\square} \bigcirc \square x^{\square} = \frac{\square}{x^{\square}} \bigcirc \frac{\square}{x^{\square}}$

c) $f(x) = \frac{5}{x^2} + \frac{1}{3x^5}$ **d)** $f(x) = -\frac{6}{5x} - \frac{7}{4x^3}$ **e)** $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{10}{3x^2}$ **f)** $f(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{x^3} + \frac{8}{x^4}$

A 3 Bilde die erste Ableitung der gegebenen Summe von Potenzfunktionen.

→ B2

a) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x}$ $f(x) = 4 \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 2 \cdot x^{\frac{1}{3}}$
$f'(x) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{-2}{\sqrt{x^3}} + \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

b) $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + 3\sqrt[4]{x}$ $f(x) = \square \cdot x^{\square} + \square \cdot x^{\square}$
$f'(x) = \square \cdot \left(\square\right) \cdot x^{\square} \bigcirc \square \cdot \square x^{\square} = \frac{\square}{\sqrt{x^{\square}}} \bigcirc \frac{\square}{\square \cdot \sqrt[\square]{x^{\square}}}$

c) $f(x) = -\frac{3}{\sqrt{x^3}} + 1$ **d)** $f(x) = x + 3\sqrt[3]{x}$ **e)** $f(x) = \frac{2 + \sqrt{x^5}}{5}$ **f)** $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

A 4 Kreuze die beiden richtigen Ableitungen an.

→ B2

a)

$f(x) = x^3 - 4x \Longrightarrow f'(x) = x^2 - 4$	☐
$f(x) = 3x^2 - 7 \Longrightarrow f'(x) = 6x - 7$	☐
$f(x) = \frac{1}{2}(x^4 - 6x) \Longrightarrow f'(x) = 2x^3 - 3$	☐
$f(x) = \frac{-x^4 + 3x^3}{3} \Longrightarrow f'(x) = -4x^3 + 9x^2$	☐
$f(x) = -2x^2 + 5x + 1 \Longrightarrow f'(x) = -4x + 5$	☐

b)

$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^5} \Longrightarrow f'(x) = x^{-2} - 3x^{-5}$	☐
$f(x) = -\frac{4}{x^3} \Longrightarrow f'(x) = \frac{12}{x^4}$	☐
$f(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}} \Longrightarrow f'(x) = -\frac{3}{x^2}$	☐
$f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \Longrightarrow f'(x) = 3x^{-\frac{1}{3}}$	☐
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$	☐

A 5 Bilde die erste Ableitung der gegebenen Funktion.

→ B3

a) $A(r) = \frac{3}{4}r^2 + \frac{r}{5}$ Ableitung nach r $\Longrightarrow A'(r) = \frac{3}{4} \cdot 2r + \frac{1}{5} = \frac{3}{2}r + \frac{1}{5}$

b) $F(a) = 4a^3 + a^2$ Ableitung nach $\square$ $\Longrightarrow F'(a) = \square \cdot \square a^{\square} + \square a^{\square} = \square a^{\square} + \square a$

c) $g(m) = 2m + 5$ Ableitung nach $\square$ $\Longrightarrow g'(m) = \square$

d) $h(z) = z^2 + \frac{3}{5}z$ Ableitung nach $\square$ $\Longrightarrow h'(z) = \square z^{\square} + \square$

A 6 → B3

Ermittle zuerst die multiplikativen und die additiven Konstanten und leite anschließend nach der vorgegebenen Variablen ab.

a) $M(r) = r^2h + 2r\pi$ Ableitung nach r
Add. Konstante: keine
Mult. Konstanten: h, 2π
$M'(r) = 2rh + 2\pi$

b) $M(h) = r^2h + 2r\pi$ Ableitung nach h
Add. Konstante: $2r\pi$
Mult. Konstante: r^2
$M'(h) = r^2$

c) $R(m) = 4m^3s^2 - 2m$ Ableitung nach ___
Add. Konstante: ___
Mult. Konstanten: ___, ___
$R'(m) =$ ___

d) $R(s) = 4m^3s^2 - 2m$ Ableitung nach ___
Add. Konstante: ___
Mult. Konstante: ___
$R'(s) =$ ___

e) $O = ms + 3f$ Ableitung nach s

f) $G = \frac{2}{3}t + \frac{s^2r}{5}$ Ableitung nach t

g) $H = \frac{ac^2 + a^2c}{b}$ Ableitung nach a

A 7 → G4

Gegeben sind eine Funktion f sowie ein Term $g(x)$, der in der Funktionsgleichung von f enthalten ist. Leite zuerst die Funktion f allgemein ab und setze anschließend den abgeleiteten Term $g'(x)$ in $f'(x)$ ein. Betrachte $g(x)$ als Kurzschreibweise für einen Ausdruck, der die Variable x enthält.

a) $f(x) = 2g(x) + 1$
Ableiten: $f'(x) = 2g'(x)$
Einsetzen von $g'(x)$ in $f'(x)$:

a1) $g(x) = x^2$
$g'(x) = 2x$
$f'(x) = 2 \cdot 2x$

a2) $g(x) = 5x^2 - 2$
$g'(x) = 10x$
$f'(x) = 2 \cdot 10x$

a3) $g(x) = \frac{x^4}{8} + 9$
$g'(x) = \frac{x^3}{2}$
$f'(x) = 2 \cdot \frac{x^3}{2}$

b) $f(x) = 3g(x) - 2$
$f'(x) =$ ___
Einsetzen von $g'(x)$ in $f'(x)$:

b1) $g(x) = x + 1$
$g'(x) =$ ___
$f'(x) =$ ___

b2) $g(x) = -x^2 - 1$
$g'(x) =$ ___
$f'(x) =$ ___

b3) $g(x) = x^3 - 10$
$g'(x) =$ ___
$f'(x) =$ ___

c) $f(x) = 5x - g(x)$ **c1)** $g(x) = 8$ **c2)** $g(x) = \sqrt{x}$ **c3)** $g(x) = \frac{1}{x}$

A 8 → G4

Ermittle die multiplikativen und die additiven Konstanten und bilde die erste Ableitung der gegebenen Funktion, wobei $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

a) $h(x) = -2f(x) + \frac{g(x)}{3} - 4$
Additive Konstante: -4
Multiplikative Konstanten: $-2, \frac{1}{3}$
$h'(x) = -2f'(x) + \frac{g'(x)}{3}$

b) $h(x) = -\frac{f(x)}{5} + 6 \cdot g(x) + 1$
Additive Konstante: ___
Multiplikative Konstanten: ___, ___
$h'(x) = ○\frac{f\,\_\,(x)}{\_\_} + \_\_ \cdot g\,\_\,(x)$

c) $h(x) = 3\frac{f(x)}{8} - g(x)$ **d)** $h(x) = af(x) + \frac{g(x)}{a} - a$ **e)** $h(x) = a\left(\frac{f(x)}{b} - b^2g(x) + b^3\right)$

A 9 → G4

Kreuze die beiden Aussagen an, bei denen korrekt abgeleitet wurde.

a)

$[f(x) - 4]' = f'(x)$	☐
$\left(\frac{f(x)}{5}\right)' = 5 \cdot f'(x)$	☐
$[2f(x) + 3]' = 2f'(x)$	☐
$[f(x)^2]' = 2 \cdot f(x)$	☐
$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g'(x)$	☐

b) $a \in \mathbb{R}$

$[g(x) + a]' = g'(x) + a$	☐
$[a \cdot g(x)]' = a \cdot g'(x)$	☐
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$	☐
$[f(x) + 2g(x)]' = f'(x) + 2g'(x)$	☐
$[f(a \cdot x)]' = f'(a)$	☐

A 10 Gegeben ist die Polynomfunktion $f(x) = x^7 - 2x^5 + 6x - 9$. Gib die erste Ableitung f' dieser Funktion an.

A 11 Bilde die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x^3}$.

A 12 Kreuze die beiden Funktionen an, deren Ableitung $f'(x) = -3x^{-2}$ lautet.

$f(x) = x^{-3}$	$f(x) = \frac{3}{x}$	$f(x) = 3 \cdot x^{-1}$	$f(x) = 6 \cdot x^{-3}$	$f(x) = -x^3$
☐	☐	☐	☐	☐

A 13 Wie oft muss man eine Polynomfunktion vom Grad n ableiten, sodass man die konstante Funktion $g(x) = 0$ erhält?

A 14 Kreuze die zutreffenden Aussagen an.

Für eine Polynomfunktion vom Grad 0 kann keine Ableitung gebildet werden.	☐
Die Ableitung einer linearen Funktion $f(x) = k \cdot x + d$ ($k \in \mathbb{R}^*$, $d \in \mathbb{R}$) lautet $f'(x) = d$.	☐
Die Ableitung einer linearen Funktion $f(x) = k \cdot x + d$ ($k \in \mathbb{R}^*$, $d \in \mathbb{R}$) lautet $f'(x) = k$.	☐
Die Ableitung einer linearen Funktion ist eine quadratische Funktion.	☐
Die Ableitung einer Polynomfunktion vom Grad $n > 1$ ist vom Grad $n - 1$.	☐

A 15 Gegeben ist eine Funktion f mit der Ableitung $f'(x) = -2a^2 \cdot x$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Kreuze alle Funktionen an, die den gleichen Ableitungsterm wie f besitzen.

$g(a) = -\frac{2a^3}{3}x$	☐
$g(a) = x^2 - 2a^2$	☐
$g(x) = -\frac{a^2x^2}{2}$	☐
$g(x) = -a^2x^2 + a$	☐
$g(x) = -(a^2x)^2$	☐

A 16 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot g(x) + 3x$. Kreuze die korrekte erste Ableitung von f an.

$f'(x) = g'(x) + 3$	☐
$f'(x) = g'(x) + 3x$	☐
$f'(x) = 2 \cdot g'(x) + 3$	☐
$f'(x) = 2 \cdot g'(x) + 3x$	☐
$f'(x) = 2 \cdot g(x) + 3$	☐
$f'(x) = 2 \cdot g(x) + 3x$	☐

A 17 Gegeben ist die Funktion h, die die Höhe eines senkrecht nach oben geworfenen Balles in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt. Es gilt $h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$, wobei die Erdbeschleunigung g sowie die Anfangsgeschwindigkeit v_0 konstant sind. Die Geschwindigkeit v des Balles zum Zeitpunkt t wird mit $v(t) = h'(t)$ bestimmt.

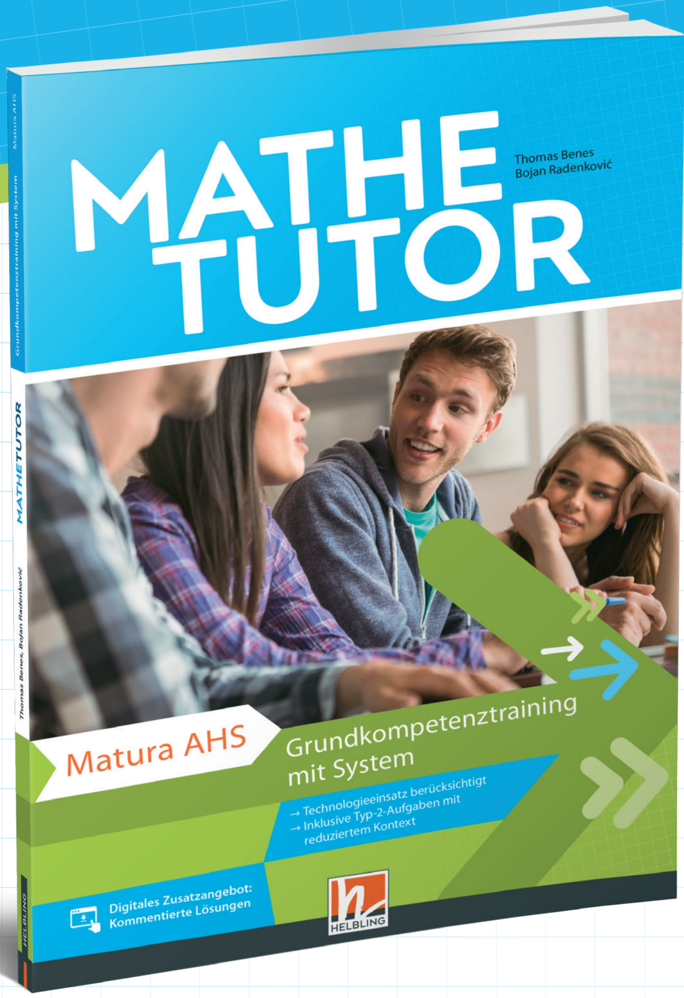
a) Gib die Gleichung der Funktion v an.
b) Ein zweiter Ball wird aus einer Höhe von 3 m nach oben geworfen. Für diesen Ball gilt $h_1(t) = 3 + v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$. Erkläre, warum $v(t) = v_1(t)$ gilt.
c) Man interessiert sich für die erreichte Höhe des Balles zu einem festen Zeitpunkt t in Abhängigkeit von der Anfangsgeschwindigkeit. Bestimme $h'(v_0)$.

Stichwortverzeichnis

Mit über 600 Aufgaben

MATHE TUTOR

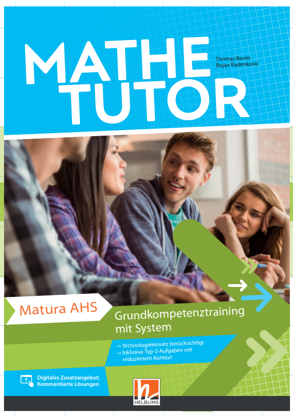
Matura



Der **MatheTutor** begleitet dich und hilft, wenn es schwierig wird – und das bis zur Matura.

Der **MatheTutor** unterstützt dich auch bei der gezielten Vorbereitung auf die Mathematik-Matura: **Informiere dich** über die Grundlagen und **vollziehe** an einem Musterbeispiel Schritt für Schritt den Lösungsweg **nach**. **Probiere** die Aufgabe zu lösen, **trainiere weiter** und **teste dich** anhand von typischen Prüfungsaufgaben selbst.

Mit dem **MatheTutor** Matura AHS sind Grundkompetenzen kein Problem mehr!



MatheTutor Matura AHS
DIN A4, 248 Seiten
+ Zusatzangebot online
ISBN 978-**3-99069-874**-7

Mehr Infos & Bestellung auf **helbling.com** und im Buchhandel

Umfangreiches Onlineangebot

helbling.com

HELBLING

HELBLING Verlagsgesellschaft m.b.H.
6063 Rum · Kaplanstr. 9
Tel.: +43 512 26 23 33-0
office@helbling.com

LERN- UND TRAININGSSYSTEM
ERFOLGREICH ERPROBT

MatheTutor – Dein Begleiter durch die 7. Klasse

Mit deinem **MatheTutor** sind die **Grundkompetenzen** der 7. Klasse kein Problem für dich! Er wiederholt mit dir von Grund auf den wichtigsten Stoff und übt alles ausführlich mit dir – wenn du willst in **mehr als 500 Aufgaben**.

Warum der MatheTutor so gut funktioniert? Er wurde von **Nachhilfe-Profis** entwickelt, die sich richtig gut damit auskennen, Mathematik einfach zu vermitteln. Dafür haben sie sich ein **erfolgreiches Lern- und Trainingssystem** ausgedacht:

1. ***Informiere dich*** zu Beginn jedes Kapitels über benötigte Grundlagen und praktische Werkzeuge für die anstehenden Aufgaben.
2. ***Vollziehe nach***, wie du typische Aufgaben meisterst. Musterbeispiele weisen dir den Weg.
3. ***Probiere selbst*** eine solche Aufgabe zu lösen. Dabei kannst du dich am entsprechenden Musterbeispiel orientieren.
4. ***Trainiere weiter*** und lerne weitere Aufgabentypen kennen, natürlich mit Hilfestellungen. So gewinnst du nach und nach die nötige Sicherheit.
5. ***Teste dich*** selbst anhand von typischen Prüfungsaufgaben – wie bei Schularbeiten und bei der Matura!

Weiters findest du online:

- **Ausführliche Lösungen** mit Hinweisen und Erklärungen – auch zum Technologieeinsatz
- **Zusätzliche *Probiere selbst*-Aufgaben**
- **Alle Modellschritte** an einer Stelle als praktisches Hilfsmittel beim Lernen und Üben

www.helbling.com

HELBLING

ISBN 978-3-99069-169-4