

MATHE TUTOR

Thomas Benes
Bojan Radenković



6

AHS

Grundkompetenztraining mit System

Technologieeinsatz berücksichtigt



Digitales Zusatzangebot:
Kommentierte Lösungen





Digitales Zusatzangebot

Die Lösungen und weitere digitale Zusatzangebote kannst du online über die Helbling-Website abrufen. Ruf dazu www.helbling.com/code auf und gib den Access Code ein (mit einer Münze oder dem Fingernagel freirubbeln).

Bildnachweis

Umschlag Stígur Már Karlsson /Heimsmýndir – iStockphoto / 7 potowizard – 123RF / 13 Cathy Yeulet – 123RF / 19 Alena Gan – shutterstock / 25 welcomia – 123RF / 31 Brocreative – Adobe Stock / 37 Galerie: kantver – 123RF / 37 Gemälde: Freeda Micheaux – Adobe Stock / 43 Viacheslav Nikolaienko – 123RF / 49 Chayapon Bootboonneam – 123RF / 55 Sebastien Decoret – 123RF / 61 hxdbzxy – 123RF / 67 Gefängniszelle: Tomasz Wyszolmirski – 123RF / 67 Kalenderblatt: Viktor Bondariev – 123RF / 73 Jdm512 – dreamstime / 79 Scheune: lightfieldstudios – 123RF / 79 Anhänger: Gabor Tinz – 123RF / 79 Eierkartons: Igor Terekhov – 123RF / 85 Szabolcs Borbely – 123RF / 91 Panagiotis Karapanagiotis – 123RF / 97 Raum: nico_blue – iStockphoto / 97 Tafelschrift: virtual-photo – iStockphoto / 101 Yanik Florin – 123RF / 111 sarymsakov – CanStockPhoto / 115 janifest – 123RF / 121 satina – 123RF / 127 stylephotographs – 123RF / 133 Ray – Adobe Stock / 139 tomas1111 – 123RF / 145 zozulya – 123RF / 151 Irina Kononova – 123RF / 157 Karel Kolis – 123RF / 163 Margarita Sidorenko – 123RF / 169 tandav – 123RF / 175 Svetoslav Sokolov – 123RF

MATHETUTOR

6. Klasse AHS

Autorenteam: Thomas Benes, Bojan Radenković

Redaktion: Richard Mesarić

Illustrationen: Georg Flor, Wien

Umschlaggestaltung: CMS – Cross Media Solutions GmbH, Würzburg

Innenlayout: Nathanaël Gourdin & Katy Müller GbR, Leipzig

Satz: CMS – Cross Media Solutions GmbH, Würzburg

Druck: Athesia Druck, Innsbruck

S8870

ISBN 978-3-99069-168-7

1. Auflage: A1' 2020

© 2020 Helbling Innsbruck • Esslingen • Bern-Belp

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk einschließlich aller Inhalte ist ganz und in Auszügen urheberrechtlich geschützt. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie oder anderes Verfahren) ohne ausdrückliche schriftliche Genehmigung des Verlags nachgedruckt oder reproduziert werden und/oder unter Verwendung elektronischer Systeme jeglicher Art gespeichert, verarbeitet, vervielfältigt und/oder verbreitet bzw. der Öffentlichkeit zugänglich gemacht werden. Alle Übersetzungsrechte vorbehalten.

Es darf aus diesem Werk gemäß §42 (6) des Urheberrechtsgesetzes für den Unterrichtsgebrauch nicht kopiert werden.



mathewerkstatt

Thomas Benes, Bojan Radenković

MATHE TUTOR

Grundkompetenztraining mit System

6. Klasse AHS

So begleitet dich dein MatheTutor

Ein **Tutor** begleitet durch den Lernprozess und hilft, wenn es schwierig wird.

Dieses Buch ist **dein Tutor** auf dem Weg durch die 6. Klasse und Richtung Mathematik-Matura.

1

Informiere dich

Ein **kurzer Text** stimmt dich auf das Kapitel ein.

Die **Grundlagen** ① benötigst du im ganzen Kapitel. Lerne oder wiederhole sie, bevor du loslegst.

Praktische **Werkzeuge** ② stehen dir für einzelne Aufgaben oder Lösungsschritte zur Verfügung. Dein MatheTutor weist dich darauf hin, wenn es sinnvoll ist, sie einzusetzen.

Du erfährst hier auch, welche **Grundkompetenzen** ③ du in diesem Kapitel trainierst.

2

Vollziehe nach

23

Lage von Geraden und Ebenen im Raum

Beispiele

B1 Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden $g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Ebene $E: 3x - 5y + 4z = 4$.

4

Wie ermittle ich die Lagebeziehung zwischen einer Geraden und einer Ebene?

1 Das Skalarprodukt von Richtungsvektor der Geraden und Normalvektor der Ebene berechnen
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow g$ und E sind entweder parallel oder g liegt in E . ($\rightarrow$ G1)

6

2 Den Punkt der Geraden in die Ebene einsetzen und überprüfen, ob die Gerade in der Ebene liegt.
 Wir setzen den Punkt der Geraden in die Gleichung der Ebene ein: $3 \cdot (-2) - 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 = 4 \Rightarrow 3 = 4$.
 Wir erhalten eine falsche Aussage. Die Gerade g liegt in einem festen Abstand parallel zur Ebene. ($\rightarrow$ G1)

Musterbeispiele ④ zeigen dir Schritt für Schritt, wie du für das Kapitel typische Aufgaben löst.

Leitfragen ⑤ helfen dir zu erkennen, um welche mathematische Fragestellung es sich handelt.

Modellschritte ⑥ schlüsseln die Lösung anschaulich auf und unterstützen dich dabei, den Lösungsweg vollständig nachzuvollziehen.

Hinweise zum Ausfüllen

In kleinen Kästchen trägst du Zahlen oder kurze Terme ein. Achte dabei besonders darauf, keine Vorzeichen oder Klammern zu vergessen.

In großen Kästchen trägst du Zahlen mit vielen (Nachkomma-)Stellen, längere Terme oder Brüche ein.

In Kreisen trägst du Vorzeichen und Operatoren ein, d. h. die Zeichen:
 $+$ $-$ $:$ $\cdot$ $<$ $>$ $\leq$ $\geq$ $=$ $\neq$ $\approx$ $\parallel$ $\perp$ $\times$

Du kreuzt leere Kästchen an, um die zugehörige Aussage als richtige Lösung zu markieren.

Auf Schreibzeilen hast du Platz für ganze Rechenzeilen oder Text.

Lage von Geraden und Ebenen im Raum

23

Wenn es regnet und die Regentropfen durch den Wind nicht senkrecht vom Himmel fallen, hält man den Regenschirm leicht schräg, um nicht nass zu werden. Die Lage des Schirms ist also dadurch bestimmt, wie der Stiel geneigt ist. Bei Ebenen im Raum verhält es sich ganz ähnlich: Wie eine Ebene „geneigt“ ist, lässt sich vollständig mit ihrem Normalvektor beschreiben.



1 Grundlagen

G1 Die Tabelle zeigt die möglichen gegenseitigen Lagen einer Geraden $g: X = A + t \cdot \vec{g}$ und einer Ebene $E: a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$, wobei $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ der Normalvektor der Ebene ist.

Lage	g schneidet E in einem Punkt S .	g liegt in E .	g liegt in einem festen Abstand parallel zu E .
Kriterium	$\vec{g} \cdot \vec{n} \neq 0$	$\vec{g} \cdot \vec{n} = 0$ und $A \in E$	$\vec{g} \cdot \vec{n} = 0$ und $A \notin E$

2 Werkzeuge

W1 Den Abstand d eines Punktes $P = (p_x | p_y | p_z)$ von der Ebene $E: a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ berechnet man mit der Formel
 $d(P, E) = \frac{|a \cdot p_x + b \cdot p_y + c \cdot p_z - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

W2 Den Schnittwinkel α zwischen einer Geraden g mit Richtungsvektor $\vec{g}$ und einer Ebene E mit Normalvektor $\vec{n}$ berechnet man folgendermaßen:
 $\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{|\vec{g} \cdot \vec{n}|}{|\vec{g}| \cdot |\vec{n}|} \right)$ und $\alpha = 90^\circ - \varphi$

W3 Den Winkel α zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2 mit ihren Normalvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ berechnet man mit der Formel $\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right)$. Ist der erhaltene Winkel größer als 90° , muss er noch von 180° subtrahiert werden.

Grundkompetenzen: AG-R 3.4, AG-L 2.7 + 3.9

139

3

Probiere selbst

Aufgaben zu den Beispielen

B1 A Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden $g: X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Ebene $E: -3x + 2y - z = -16$.

7

1 Das Skalarprodukt von Richtungsvektor der Geraden und Normalvektor der Ebene berechnen

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \dots + \dots + \dots = \dots \Rightarrow g$ und E

2 Den Punkt der Geraden in die Ebene einsetzen und überprüfen, ob die Gerade in der Ebene liegt

Setze den Punkt der Geraden in die Ebene ein: $\dots + \dots + \dots = \dots \Leftrightarrow \dots$

Die **Aufgaben zu den Beispielen** ⑦ sind wie die Musterbeispiele aufgebaut und ermöglichen es dir, selbst erste Aufgaben zu lösen.

Eine weitere **Probiere selbst**-Seite findest du online.

4x -3 0,25 (-2)

-0,9987 $\sqrt{a^2 + b^2}$ $\frac{4}{9}$ $-\frac{1}{x^2}$

$\neq$ $\geq$ $+$

☐ ☒

$-2x + 3 = -4 \quad | -3$

Das Preisgeld beträgt 48 Euro.

4 Trainiere weiter

23 Lage von Geraden und Ebenen im Raum

Aufgaben

A1 Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E . Bestimme ihre gegenseitige Lage.

Tipps 8 Eine Parameterdarstellung der Form $X = t \cdot \vec{g}$ bedeutet immer, dass die Gerade g durch den Koordinatenursprung verläuft, d.h. $(0|0|0)$ liegt auf der Geraden.

a) $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; E: 3x + 8y - z = 4$ c) $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; E: 5x - 6y - 8z = -6$

b) $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; E: x + 2y + 7z = 1$ d) $g: X = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; E: -4y + z = 1$

A2 Die Gerade g und die Ebene E schneiden einander. Berechne ihren Schnittpunkt S .

a) $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; E: 3x - 4y - 2z = -31$
 x, y und z von g in E einsetzen: $3 \cdot (-4 + t) - 4 \cdot (2 + 3t) - 2 \cdot (5 - 4t) = -31 \Rightarrow t = 1$
 $t = 1$ in g einsetzen: $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; E: 4x - y - 2z = -2$ c) $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; E: -x + 5y + z = -2$

A3 Berechne den Schnittwinkel α zwischen der Geraden g und der Ebene E .

a) $E: -x + y - 2z = 8, g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \right) = 103,83^\circ \Rightarrow \alpha = |90^\circ - \varphi| = 13,83^\circ$

b) $E: 5x - 2y - 4z = 1, g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $E: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $E: 2x - 5y + z = -3, g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e) $E: x - z = -3, g: X = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Löse die **Aufgaben** der Reihe nach, sie bauen oft aufeinander auf. Damit trainierst du die Grundkompetenzen des Kapitels.

Die **Tipps** 8 deines MatheTutors solltest du im Hinterkopf behalten.

Musterlösungen 9 sind grün hinterlegt.

Online findest du Lösungen mit Hinweisen und Erklärungen. Lies sie, auch wenn du die Aufgabe richtig gelöst hast. Sie helfen dir oft bei den nächsten Aufgaben.

Symbole



Für Zwischenschritte, Nebenrechnungen, Ergebnisse benötigst du hier ein eigenes Blatt.



Diese Aufgabe wird durch Technologieeinsatz leichter.



Diese Aufgabe erfordert Technologieeinsatz. Dieser wird in den Lösungen erläutert.

Online-Angebot

Wie du Zugang zum Online-Angebot erhältst, erfährst du auf der inneren Umschlagseite des MatheTutors.

Lösungen

Lösungen zu allen Aufgaben der aktuellen Seite mit Hinweisen und Erklärungen, auch zum Technologieeinsatz

Weitere Aufgaben

Eine weitere *Probiere selbst*-Seite zum jeweiligen Kapitel. Beschäftige dich bei Bedarf noch intensiver mit den Musterbeispielen.

Modellschritte

Die Modellschritte aus allen Kapiteln in einem Dokument praktisch zusammengefasst, zum Nachschlagen, Lernen und Üben

5

Teste dich

23

Lage von Geraden und Ebenen im Raum

A 11

Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.

Die Gerade $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E: x + 2y + z = 3$ sind parallel.	☐
Die Gerade $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E: 4x + 2y - z = 8$ schließen einen rechten Winkel miteinander ein.	☐
Die Gerade $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt in der Ebene $E: y - z = 2$.	☐
Die Gerade $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E: x + 2y + z = 1$ sind ident.	☐
Die Gerade $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneidet die Ebene $E: x + y + z = -2$ im Punkt $S = (-2 0 0)$.	☐

A 12

Gib die Gleichung einer Ebene E_1 an, in der der Punkt $P = (3|-4|5)$ liegt und die parallel zu $E_2: 2x + y - 4z = 4$ ist.

A 13

Bestimme die gegenseitige Lage der Ebenen $E_1: 6x - 5y - 4z = 1$ und $E_2: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A 14

Ordne den Ebenenpaaren jeweils den (ungefähren) Schnittwinkel zwischen den zwei Ebenen zu.

$E_1: -x - 4y + z = 8$ $E_2: 5x - y + z = 1$	$E_1: 2x + y + 5z = 10$ $E_2: 4x - 7y + z = -2$	$E_1: y - 2z = 6$ $E_2: x + z = -5$	$E_1: x - z = 2$ $E_2: 3y - z = -4$

A	B	C	D	E	F
50,77°	90°	100,04°	77,08°	124,67°	82,25°

A 15

Berechne den Schnittwinkel α zwischen der Geraden $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Ebene $E: x - 5y + 2z = -5$.

Die letzte Seite jedes Kapitels bietet dir **typische Prüfungsaufgaben**, wie bei Schularbeiten und bei der Matura.

Für diese Seite solltest du immer ein eigenes Blatt für die Erstellung der Lösungen bereithalten.

Auf dieser Seite gibt es keine Hilfestellungen in Form von Tipps und Symbolen mehr.

In den Online-Lösungen findest du auch für diese Seite Hinweise und Erklärungen. Lies sie, auch wenn du die Aufgabe richtig gelöst hast.

Inhaltsverzeichnis

Hinweise zur Verwendung von Fachbegriffen	5
Tipps und Hinweise zu den Aufgaben.	6
1 Potenzrechnung	7
2 Logarithmen	13
3 Lineare und Betragsungleichungen	19
4 Weitere Ungleichungen	25
5 Monotonie und Polynomfunktionen.	31
6 Potenzfunktionen	37
7 Änderungsmaße	43
8 Exponentialfunktionen	49
9 Exponentielle Modelle	55
10 Modellierung von Wachstum und Zerfall	61
11 Winkelfunktionen	67
12 Formeln und Funktionen	73
13 Zahlenfolgen und ihre Eigenschaften	79
14 Arithmetische Folgen	85
15 Geometrische Folgen	91
16 Rekursive Darstellung von Folgen	97
17 Reihen	101
18 Vektoren im n -dimensionalen Raum	111
19 Geometrie von Vektoren im Raum	115
20 Vektorprodukt und Einheitsvektoren	121
21 Geraden im Raum	127
22 Ebenen im Raum	133
23 Lage von Geraden und Ebenen im Raum	139
24 Grafische Darstellung von Daten	145
25 Boxplot	151
26 Kennzahlen der beschreibenden Statistik	157
27 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie	163
28 Bedingte Wahrscheinlichkeiten	169
29 Baumdiagramme	175
 Liste der Grundkompetenzen	 181
Stichwortverzeichnis	183

Hinweise zur Verwendung von Fachbegriffen

Dein MatheTutor gebraucht die gleichen mathematischen Fachbegriffe, die auch von deinem Schulbuch, deiner Lehrerin bzw. deinem Lehrer sowie in der schriftlichen Mathematik-Matura verwendet werden. Manchmal gibt es mehrere gleichwertige Ausdrücke. Da Geschmäcker bekanntlich verschieden sind, kommt es vor, dass Erklärungsbedarf besteht. Es gibt auch Begriffe, die nicht alle einsetzen, weil man die Mathematik sowohl mit diesem Begriff als auch ohne ihn erfolgreich meistern kann.

Damit dadurch keine Missverständnisse auftreten, sind auf dieser Seite Ausdrücke erläutert, die nicht in allen Schulbüchern oder bei allen Lehrerinnen und Lehrern gleich verwendet werden. Wenn du auf einen dieser Begriffe stößt, erfährst du hier, wie er in der Sprache deines MatheTutors zu verstehen ist.

Ereignisraum (Ergebnisraum) (Kapitel 27): Grundraum Ω

gerade Funktion (Kapitel 6, 7, 12): Funktion, deren Graph achsensymmetrisch (bzgl. der y-Achse) ist

Gleichung einer Ebene (Kapitel 22–23): Sowohl die Parameterdarstellung einer Ebene $E: X = P + \vec{g} \cdot t + \vec{h} \cdot \tau$ als auch die Normalvektordarstellung (Normalvektorform) $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A$ bzw. $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$ stellen Gleichungen dar, daher akzeptiert dein MatheTutor beide Darstellungen als Ebenengleichung. In manchen Büchern wird die Normalvektordarstellung erwartet, wenn eine Ebenengleichung anzugeben ist. Die Parameterdarstellung ist dann keine Ebenengleichung.

Intervallskala (siehe *Skala*)

Kreisfrequenz (Kapitel 11): Beschreibt eine Sinusfunktion $s(t) = a \cdot \sin(b \cdot t + \varphi)$ eine physikalische Schwingung (z. B. Pendelbewegung), dann heißt b die Kreisfrequenz und wird meist mit ω bezeichnet.

Kreuzprodukt (Kapitel 20–22): Vektorprodukt

Dein MatheTutor bevorzugt den Begriff Vektorprodukt, weil das betont, dass das Ergebnis ein Vektor ist, im Gegensatz zum Skalarprodukt, dessen Ergebnis eine (reelle) Zahl ist.

metrische Variable, metrische Skala siehe *Skala*

monoton wachsend/streng monoton wachsend

(Kapitel 5–8, 13–15): monoton steigend/streng monoton steigend

Monotoniebereiche (Kapitel 14, 18, 20): die Intervalle, in denen eine betrachtete Funktion unterschiedliches Monotonieverhalten aufweist, z. B. lauten die Monotoniebereiche von $f(x) = x^2$: streng monoton fallend in $(-\infty; 0]$ und streng monoton steigend in $[0; \infty)$.

nominale Variable, Nominalskala siehe *Skala*

ordinale Variable, Ordinalskala siehe *Skala*

orthogonal (Kapitel 27, 28, 29): normal (rechtwinkelig)

parallele Ebenen (Kapitel 23): Sind zwei Ebenen parallel, können sie einen Abstand haben oder „aufeinanderliegen“ (ident sein).

Beim Ermitteln der Lagebeziehung zwischen zwei Ebenen wird aber oft zwischen „parallel“ und „ident“ unterschieden. Parallel soll dann eigentlich bedeuten: mit Abstand, also nicht ident.

Wichtig ist, dass dir bewusst ist, dass es hier unterschiedliche Interpretationen gibt, und du bei Prüfungen den Begriff so verwendest, wie deine Lehrerin oder dein Lehrer im Unterricht.

Proportionalskala siehe *Skala*

Skala/Skalenniveau (Kapitel 26): Wird eine Variable (ein Merkmal) statistisch untersucht, so werden die Mess- bzw. Beobachtungsdaten mit unterschiedlichen Skalen aufgezeichnet. Man spricht davon, dass die Merkmale unterschiedliche Skalenniveaus haben.

nominale Variable (z. B. Haarfarbe) → Nominalskala (blond, braun, rot, schwarz, ...)

ordinale Variable (z. B. Schulnoten) → Ordinalskala (Sehr gut, Gut, Befriedigend, ...)

metrische Variable (z. B. Temperatur in °C) → metrische Skala = Intervallskala (Zahlen mit Einheit °C)

Verhältnisskala = Proportionalskala, eine spezieller Fall einer metrischen Skala, bei dem ein natürlicher Nullpunkt definiert ist (z. B. Körpergewicht → Skala: Zahlen mit Einheit kg)

Dein MatheTutor spricht von nominalen, ordinalen und metrischen Datentypen, denen Datenlisten angehören.

Am wichtigsten ist, dass du die Unterschiede zwischen den Arten von Datentypen/Variablen/ Merkmalen/Skalen verstehst, damit du entscheiden kannst, welche Zentralmaße für eine gegebene Datenliste sinnvoll verwendet werden können.

Termdarstellung einer Funktion (Kapitel 14–21): Funktionsgleichung

Dein MatheTutor verwendet den Begriff Termdarstellung in diesem Band für die explizite Darstellung von Folgen.

Urliste (Kapitel 24–26): die ursprüngliche Aufzeichnung der Beobachtungs- oder Messwerte

Dein MatheTutor spricht immer allgemein von einer Datenliste. Der Begriff Urliste betont, dass die ursprünglichen Daten noch nicht „angefasst“ wurden, z. B. zusammengefasst, interpretiert, grafisch dargestellt, ...

Verhältnisskala siehe *Skala*

partielles Wurzelziehen (Kapitel 1): teilweises Wurzelziehen

primitive Periode(nlänge) (Kapitel 11): kleinste Periode einer periodischen Funktion

ungerade Funktion (Kapitel 6, 7, 12): Funktion, deren Graph punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs $(0|0)$ ist

Ungleichung „über“ $\mathbb{R}$ ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$) lösen (Kapitel 3, 4): gibt die Grundmenge der Gleichung an, d. h. nur Zahlen aus der vorgegebenen Menge können Elemente der Lösungsmenge der Ungleichung sein

Tipps und Hinweise zu den Aufgaben

Zwei wichtige Tipps für das Lösen der Aufgaben

Verwende die Lösungen, um etwaige Unklarheiten zu beseitigen. Tu das aber erst, nachdem du die Aufgabe selbstständig probiert hast.

Skizzen und Nebenrechnungen sind ein wichtiger Bestandteil jeder mathematischen Überlegung. Nimm ein Blatt Papier zur Hand, wenn der Platz im Buch nicht ausreichen sollte.

Aufgabenformate im Teil 1 der Matura

Formate	Hinweise	Beispiele
Offenes Antwortformat	Formuliere eine Antwort in eigenen Worten, z. B. wenn eine Erklärung, Begründung, längere Rechnung oder Interpretation gefordert ist.	Seite 12 A23
Halboffenes Antwortformat	Ergänze eine teilweise vorgegebene Antwort, z. B. wenn einzelne Werte zu berechnen oder Abbildungen zu ergänzen sind.	Seite 24 A16
Lückentext	Ein Satz mit zwei Lücken ist vorgegeben. Für jede Lücke stehen mögliche Satzteile als Auswahl zur Verfügung. Kreuze jeweils genau einen der drei Satzteile an.	Seite 18 A16
Multiple Choice 2 aus 5	Kreuze die zwei richtigen unter fünf Antwortmöglichkeiten an.	Seite 36 A10
Multiple Choice 1 aus 6	Kreuze die eine richtige unter sechs Antwortmöglichkeiten an.	Seite 30 A14
Zuordnungsformat 4 aus 6	Schreibe in die vier Ausfüllfelder die Buchstaben der richtigen Antworten aus den sechs gegebenen Antwortmöglichkeiten.	Seite 12 A17
Konstruktionsformat	Ergänze die vorgegebene Abbildung durch ein grafisches Element, z. B. Vektoren oder Funktionsgraphen.	Seite 30 A17 Seite 88 A3

Zusätzliche Aufgabenformate in diesem Buch

Formate	Hinweise	Beispiele
Multiple Choice x aus y	Kreuze die vorgegebene Anzahl an Antwortmöglichkeiten an. z. B. 1 aus 2, 1 aus 4 oder 2 aus 5.	Seite 12 A16 Seite 41 A7
Zuordnungsformat x aus y	Schreibe in alle Ausfüllfelder die Beschriftungen der richtigen Antworten aus den gegebenen Antwortmöglichkeiten.	Seite 22 A3 Seite 40 A2
Ausfüllen	Große Teile der Antwort sind vorgegeben. Ergänze die richtigen Zahlen, Terme, Symbole oder kurzen Texte.	Seite 10 A2 Seite 178 A1
Schritt für Schritt	Löse die Aufgabe in den vorgegebenen Schritten: Fülle Ausfüllkästchen und Schreibzeilen aus, ergänze Abbildungen und kreuze korrekte Aussagen an.	Seite 53 A5 Seite 82 A1

Ein Literaturnobelpreisträger schrieb einmal: „Die Bäume mit tiefen Wurzeln sind die, die hoch wachsen.“ Stellen wir uns die Mathematik als Baum vor, so ist die Algebra, in der das sichere Beherrschen von Rechenregeln und -gesetzen von großer Bedeutung ist, eine seiner ganz tief liegenden Wurzeln. In diesem Kapitel lernen und festigen wir Rechenregeln für Potenzen, um im Baum in großer Höhe Halt zu finden.



Grundlagen

G1 Eine **Potenz** besteht aus **Basis** und **Hochzahl (Exponent)**: $\text{Potenz} = \text{Basis}^{\text{Hochzahl}}$.
Beispiel: 5^2 ist eine Potenz mit Basis 5 und Hochzahl 2. Die Zahl 5 wird mit 2 „potenziert“.

G2 **Rechenregeln für Potenzen:**

- ① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Multipliziert man zwei Potenzen mit **gleicher Basis**, so werden ihre **Hochzahlen addiert**.
- ② $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
Dividiert man zwei Potenzen mit **gleicher Basis**, so werden ihre **Hochzahlen subtrahiert**.
- ③ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ Wird eine **Potenz potenziert**, so werden die **Hochzahlen multipliziert**.

G3 **Rechenregeln für Potenzen mit gleichen Hochzahlen:**
 $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ und $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

G4 Eine Potenz mit einer negativen Hochzahl ist der Kehrwert der Potenz mit der positiven Hochzahl.
Beispiele: $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ $\frac{1}{a^{-4}} = a^4$ $\frac{a^{-3}}{b^{-5}} = \frac{b^5}{a^3}$

G5 Eine Potenz mit einem Bruch als Hochzahl kann als Wurzel der Potenz geschrieben werden: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.
Beispiele: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$

G6 Sonderfälle: $a^0 = 1$ und $a^1 = a$ bzw. $\sqrt[n]{a^n} = a$ und $(\sqrt[n]{a})^n = a$

Werkzeuge

W1 Hilfreich für das teilweise Wurzelziehen: Einen Bruch, dessen Zähler größer ist als der Nenner, kann man als gemischten Bruch, d. h. mit Ganzen schreiben, z. B. $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$.

W2 Einen Term, der mit einem Bruch multipliziert wird, kann man in den Zähler verschieben: $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ und $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$

W3 Die Division durch einen Bruch entspricht der Multiplikation mit dem Kehrwert des Bruches: $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$

W4 Wurzelausdrücke können manchmal schneller mit den folgenden **Wurzelrechenregeln** vereinfacht werden.

– Einen Term bringt man unter eine Wurzel, indem man mit dem Exponenten der Wurzel potenziert:

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

– Verschachtelte Wurzeln schreibt man als eine Wurzel, indem man die Exponenten multipliziert:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$$

– Die Regeln aus → G3 gelten auch für Wurzeln mit gleichen Exponenten:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \text{ und } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Beispiele

B 1

Vereinfache den Ausdruck. a) $(a^2 b)^3 \cdot (ab^2)^2$ b) $\frac{(a^2 b^3)^3}{(a^3 b^2)^2}$

Wie vereinfache ich Ausdrücke, in denen Potenzen potenziert werden?

1 Alle Klammern auflösen, indem die Hochzahlen multipliziert werden

Potenzen können nur dann zusammengefasst werden, wenn sie miteinander multipliziert werden. Wir fügen zwischen allen Potenzen ein Malzeichen ein, um keine Potenz zu übersehen, und wenden Regel ③ aus → G2 an.

$$\text{a) } (a^2 \cdot b)^3 \cdot (a \cdot b^2)^2 = a^{2 \cdot 3} \cdot b^{1 \cdot 3} \cdot a^{1 \cdot 2} \cdot b^{2 \cdot 2} = a^6 \cdot b^3 \cdot a^2 \cdot b^4 \quad \text{b) } \frac{(a^2 \cdot b^3)^3}{(a^3 \cdot b^2)^2} = \frac{a^{2 \cdot 3} \cdot b^{3 \cdot 3}}{a^{3 \cdot 2} \cdot b^{2 \cdot 2}} = \frac{a^6 \cdot b^9}{a^6 \cdot b^4}$$

2 Potenzen mit gleicher Basis mit den Rechenregeln für Potenzen zusammenfassen

Wir wenden die Regeln ① und ② aus → G2 an, sowie in b) zusätzlich → G6.

$$a^6 \cdot b^3 \cdot a^2 \cdot b^4 = a^{6+2} \cdot b^{3+4} = a^8 b^7 \quad \frac{a^6 \cdot b^9}{a^6 \cdot b^4} = a^{6-6} \cdot b^{9-4} = \underbrace{a^0}_{1} \cdot b^5 = b^5$$

B 2

Schreibe den Ausdruck als Produkt von Potenzen und vereinfache. a) $\sqrt[3]{2a^4 b} \cdot \sqrt[3]{2ab^2}$ b) $\sqrt[3]{ab^3} \cdot \sqrt[3]{a^3 b}$

Wie vereinfache ich Ausdrücke mit Wurzeln durch Umwandlung in Potenzen?

1 Alle Wurzeln als Potenzen schreiben und die Hochzahlen laut Potenzrechenregeln multiplizieren

Wir fügen zwischen allen Basen ein Malzeichen ein, um keine Potenz zu übersehen, und wenden Regel ③ aus → G2, → G3, → G5, → G6 und → W2 an.

$$\text{a) } \sqrt[3]{2 \cdot a^4 \cdot b} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot a \cdot b^2} = (2 \cdot a^4 \cdot b)^{\frac{1}{3}} \cdot (2 \cdot a \cdot b^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} \\ \text{b) } \sqrt[3]{a \cdot b^3} \cdot \sqrt[3]{a^3 \cdot b} = (a \cdot b^3)^{\frac{1}{3}} \cdot (a^3 \cdot b)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{3}{3}} \cdot a^{\frac{3}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$$

2 Alle Hochzahlen auf gleichen gemeinsamen Nenner bringen und die Hochzahlen der Potenzen mit gleicher Basis mit den Rechenregeln für Potenzen zusammenfassen

Wir wenden Regel ① aus → G2 an.

$$\text{a) } \text{Alle Hochzahlen haben den bereits gleichen Nenner: } 2^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{3}} \cdot b^{\frac{3}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} a^{\frac{5}{3}} b \\ \text{b) } \text{Der kleinste gemeinsame Nenner der Hochzahlen ist 6: } a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{3}{3}} \cdot a^{\frac{3}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{6}} \cdot b^{\frac{9}{6}} \cdot a^{\frac{6}{6}} \cdot b^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{10}{6}} \cdot b^{\frac{11}{6}} = a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{11}{6}}$$

B 3

Vereinfache den Ausdruck $\sqrt[3]{8a^3 b^7}$ durch teilweises Wurzelziehen.

Wie wende ich teilweises Wurzelziehen an?

1 Alle Wurzeln als Potenzen schreiben und die Hochzahlen laut Potenzrechenregeln multiplizieren

$$\sqrt[3]{8a^3 b^7} = (8 \cdot a^3 \cdot b^7)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{3}{3}} \cdot b^{\frac{7}{3}}$$

2 Alle Hochzahlen kürzen bzw. als gemischte Brüche schreiben und Potenzen von Zahlen (mit dem Taschenrechner) berechnen

Wir kürzen die Hochzahl $\frac{3}{3}$ zu 1 und berechnen $8^{\frac{1}{3}}$ mit dem Taschenrechner.

Wir wenden → W1 an und wandeln die Hochzahl $\frac{7}{3}$ (mit dem Taschenrechner) zum gemischten Bruch $2\frac{1}{3}$ um.

$$8^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{3}{3}} \cdot b^{\frac{7}{3}} = 2 \cdot a \cdot b^{2\frac{1}{3}}$$

3 Gemischte Brüche als Summe schreiben und laut Potenzregeln in ein Produkt zweier Potenzen zerlegen

$$2 \cdot a \cdot b^{2\frac{1}{3}} = 2 \cdot a \cdot b^{2+\frac{1}{3}} = 2 \cdot a \cdot b^2 \cdot b^{\frac{1}{3}}$$

4 Alle Potenzen, die mit einem Bruch als Hochzahl verblieben sind, als Wurzel darstellen

$$2 \cdot a \cdot b^2 \cdot b^{\frac{1}{3}} = 2ab^2 \cdot \sqrt[3]{b}$$



Potenzrechnung

Aufgaben

A 1 Berechne die Potenz.

→ G6

a) $2^0 = 1$

b) $0,4^1 = 0,4$

c) $-5^0 = \square$

d) $0^1 = \square$

e) $1^0 = \square$

A 2 Stelle das Ergebnis als eine einzige Potenz dar.

→ G2

a) $2^3 \cdot 2^7 = 2^{10}$

c) $a^{-3} \cdot a^{12} = \square$

e) $\frac{3^9}{3^{-2}} = 3^{9-(-2)} = 3^{11}$

g) $\frac{b^{18}}{b^{-6}} = \square$

b) $7^2 \cdot 7^6 = \square$

d) $x^{0,5} \cdot x^{\frac{5}{2}} = \square$

f) $\frac{4^{20}}{4^{15}} = \square$

h) $\frac{y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{3}}} = \square$

A 3 Vereinfache den Ausdruck. Stelle das Ergebnis mit möglichst wenigen Potenzen dar.

→ G2

→ W2



a) $4a^2 b \cdot \frac{1}{2a^2 b^2} = \frac{4 \cdot a^2 \cdot b}{2 \cdot a^2 \cdot b^2} = 2a^4 b^{-1}$

b) $27x^2 y^3 \cdot \frac{1}{9x^2 y^{-1}} = \frac{27}{9} \cdot \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{y^3}{y^{-1}} = 3 \cdot 1 \cdot y^4 = 3y^4$

c) $\frac{5}{8ab^3} \cdot 2a^2 b^{-3}$

d) $\frac{1}{16x^{-2} y^{-1}} \cdot 6xy$

e) $\frac{1}{4a} \cdot 2a^{-3} \cdot \frac{4}{5a^{-3}}$

f) $\frac{18xy}{5x^{-3} y^2} \cdot \frac{1}{9x} \cdot 25x^{-4}$

A 4 Vereinfache den Ausdruck. Stelle das Ergebnis als Produkt von Potenzen dar.

→ G3-G4

a) $(a^2 b)^3 = a^6 b^3$

c) $(x^2 y^{-7})^4 = \square$

e) $\left(\frac{a}{b^4}\right)^2 = \frac{a^2}{b^8} = a^2 b^{-8}$

g) $\left(\frac{c^6}{d^{-11}}\right)^{-2} = \square$

b) $(x^3 y)^5 = \square$

d) $(r^{0,5} s^{\frac{1}{3}})^6 = \square$

f) $\left(\frac{c^{-2}}{d}\right)^8 = \square$

h) $\left(\frac{c^{10}}{d^{20}}\right)^{0,2} = \square$

A 5 Vereinfache den Ausdruck. Stelle das Ergebnis mit möglichst wenigen Potenzen dar.

→ B1

→ W3



a) $\left(\frac{4xy}{3z^2}\right)^{-1} : \left(\frac{2x^2 y^{-1}}{6z}\right)^{-2} \stackrel{①}{=} \frac{4^{-1} \cdot x^{-1} \cdot y^{-1}}{3^{-1} \cdot z^{-2}} : \frac{2^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^2}{6^{-2} \cdot z^{-2}} \stackrel{②}{=} \frac{4^{-1} \cdot x^{-1} \cdot y^{-1}}{3^{-1} \cdot z^{-2}} \cdot \frac{6^{-2} \cdot z^{-2}}{2^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^2} \stackrel{③}{=} \frac{4^{-1} \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot 6^{-2} \cdot z^{-2}}{3^{-1} \cdot z^{-2} \cdot 2^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^2} = \frac{1}{12} x^3 y^{-3}$

① Alle Klammern auflösen

② Den Kehrwert des zweiten Bruches bilden und damit die Division in eine Multiplikation umwandeln

③ Zu einem Bruch zusammenfassen, Zahlen (mit dem Taschenrechner) vereinfachen und die Potenzen mit gleicher Basis zusammenfassen

b) $\left(\frac{3x}{y}\right)^{-2} : \left(\frac{6x^{-1} y^2}{2x}\right)^2$

c) $\left(\frac{5ab^2}{2c}\right)^2 : \left(\frac{2}{abc}\right)^{-3}$

d) $\left(\frac{1}{4} v^2 w\right)^{-1} : \left(\frac{2v^{-1}}{w^2}\right)^{-1}$

e) $\left(\frac{1}{x^2 y}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{2xy^4}\right)^{-1}$

A 6 Schreibe die Potenzen mit positiven Hochzahlen.

→ B1

→ G4



a) $\left(\frac{-5x^{-1} y}{z^3}\right)^{-2}$ Die Hochzahl -2 ist eine gerade Zahl, das Minuszeichen von -5 fällt weg: $\frac{5^{-2} x^2 y^{-2}}{z^{-6}} = \frac{x^2 z^6}{5^2 y^2} = \frac{x^2 z^6}{25y^2}$

b) $\left(\frac{-3x^{-3}}{y^2}\right)^{-1}$ Die Hochzahl -1 ist eine ungerade Zahl, das Minuszeichen von -3 fällt nicht weg: $-\frac{3^{-1} x^3}{y^{-2}} = -\frac{x^3 y^2}{3^1} = -\frac{x^3 y^2}{3}$

c) $\left(\frac{-2r}{s^2}\right)^{-4}$

d) $\left(\frac{-5a^2 b^{-1}}{c^2}\right)^{-3}$

e) $\left(\frac{-v}{5w^{-1}}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{vw^2}\right)^2$

f) $\left(\frac{-2x^{-1} y}{3z}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{3xyz^{-1}}\right)^{-1}$

A 7 Stelle den folgenden Ausdruck unter Verwendung von Technologie mit positiven Hochzahlen dar.

**Tipp** Achte bei der Arbeit mit Potenzen bei Technologieinsatz darauf, dass du immer Malzeichen zwischen direkt aufeinanderfolgenden Variablen einfügst, also z.B. $x \cdot y$ und nicht xy . Sind die Variablen ohnehin getrennt (z.B. durch einen Exponenten wie bei $x^2 y$), ist die Eingabe des Malzeichens nicht erforderlich.

a) $\left(\frac{x^{-1} y^3}{xy^4}\right)^2 = \frac{1}{x^4 y^2}$

b) $\left(\frac{-ab^2}{2c^3}\right)^2 : \left(\frac{2c^2}{ab}\right)^{-3}$

c) $\left(\frac{1}{3} v^5 w^{-4}\right)^{-2} : w^{10}$

d) $\frac{(ax^2 s^{-8})^{-3}}{a^{-5} (a^3 x^{-1} s)^2}$



Potenzrechnung

A 16

Gegeben ist der Term $\left(\frac{x^{-2} \cdot y}{z^4}\right)^{-1}$. Kreuze die drei Terme an, die durch korrekte Umformungen aus diesem Term hervorgehen.

$x^2 \cdot y^{-1} \cdot z^{-4}$	☐
$x^2 \cdot y^{-1} \cdot z^4$	☐
$\frac{x^2 \cdot z^4}{y}$	☐
$\frac{y}{x^2 \cdot z^{-4}}$	☐
$x^2 \cdot \frac{1}{y} \cdot z^4$	☐

A 17

Ordne den Termen jeweils den äquivalenten Term zu.

$\left(\frac{2xy^{-1}}{x^{-2}}\right)^{-1}$	☐	A	$4x^2y^2$
$\left(\frac{x}{2x^2y}\right)^{-2}$	☐	B	$-\frac{16x^2}{y^2}$
$\left(\frac{-4x^{-2}y}{x^{-1}}\right)^2$	☐	C	$\frac{y}{2x^3}$
$\left(\frac{-2}{x^{-2}y^{-1}}\right)^3$	☐	D	$-8x^5y^3$
		E	$\frac{16y^2}{x^2}$
		F	$-8x^6y^3$

A 18

Vereinfache den Term $\left(\frac{a^{-4}}{b^5} \cdot b^{-1}\right)^{-2} : \left(\frac{b^3}{a^{-1}}\right)^4$ so weit wie möglich und stelle das Ergebnis mit positiven Hochzahlen dar.

$$\left(\frac{a^{-4}}{b^5} \cdot b^{-1}\right)^{-2} : \left(\frac{b^3}{a^{-1}}\right)^4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

A 19

Bringe im Term alles unter eine Wurzel.

$$x \cdot \sqrt{\sqrt{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

A 20

Vereinfache den Ausdruck durch teilweises Wurzelziehen.

$$\sqrt[3]{\frac{27y^5}{8x^3}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

A 21

Bringe den Ausdruck unter eine Wurzel und vereinfache so weit wie möglich.

$$\sqrt[3]{2xy} \cdot \sqrt[4]{\frac{x^2}{4y}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

A 22

Löse die Wurzelgleichung $\sqrt{x-2} = \sqrt{5x+4}$ für $x \in \mathbb{R}$.

$$L = \underline{\hspace{2cm}}$$

A 23

Das dritte Kepler'sche Gesetz, das die Umlaufzeiten T_1 und T_2 zweier Planeten des Sonnensystems mit den großen Halbachsen ihrer Umlaufbahnen a_1 und a_2 in Zusammenhang bringt, kann in der Form

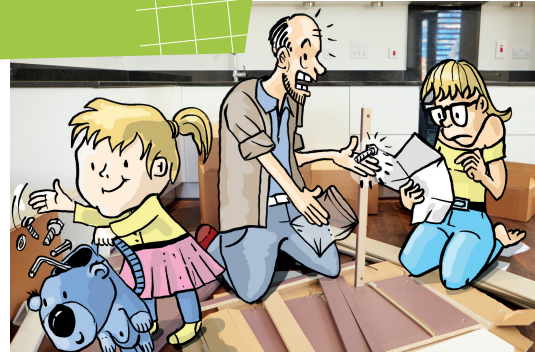
$$T_2 = \sqrt{T_1^2 \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3}$$

geschrieben werden.

- Stelle den obigen Ausdruck für T_2 ohne Wurzeln, Brüche und Klammern dar.
- Forme den obigen Ausdruck für T_2 nach a_2 um. Gib dein Ergebnis mit ausschließlich natürlichen Hochzahlen an.
- Für die Erde nehmen wir $a_1 = 149,6 \cdot 10^6$ km und $T_1 = 365,25$ Tage an, für den Planeten Mars $T_2 = 687$ Tage. Berechne die große Halbachse a_2 der Umlaufbahn des Mars.



Wer hat nicht schon einmal beim Aufbau von Möbeln die Nerven gewegeworfen, weil die Anleitung für Stirnrunzeln sorgte? Hilfsmittel sind dazu gedacht, das Leben einfacher zu machen, manchmal erreichen sie aber das genaue Gegenteil. Logarithmen helfen dabei, Potenzen einfacher zu berechnen, viele Schülerinnen und Schüler nehmen das jedoch gänzlich anders wahr. Das muss nicht sein! Wir lernen in diesem Kapitel verlässliche Werkzeuge für die Bearbeitung entsprechender Aufgaben kennen.



Grundlagen

G1 Rechnen mit Logarithmen bedeutet Rechnen mit Hochzahlen. Der **Logarithmus** $\log_a c$ oder $\log_a(c)$ einer Zahl c zur Basis a ist jene Hochzahl, mit der a potenziert werden muss, um c zu erhalten: $\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$. Die Zahl a heißt **Basis** des Logarithmus. Die Zahl c heißt **Numerus**. Basis $a \neq 1$ und Numerus c sind positive reelle Zahlen.

Beispiel: $2^x = 8$
Die Hochzahl, die mit 2 potenziert werden muss, um 8 zu erhalten, ist 3. Man schreibt: $\log_2 8 = 3$.

G2 Rechenregeln für Logarithmen:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$$

G3 Der **dekadische Logarithmus** (Kurzschreibweise $\lg$) ist der Logarithmus zur Basis 10, d. h. $\lg c = \log_{10} c$. Der **natürliche Logarithmus** (Kurzschreibweise $\ln$) ist der Logarithmus zur Basis e , d. h. $\ln c = \log_e c$. $e = 2,718\dots$ ist die **Euler'sche Zahl**.

Werkzeuge

W1 Zwei Sonderfälle sind zur Vereinfachung von Rechnungen besonders nützlich: $\log_a 1 = 0$ und $\log_a a = 1$.
Beispiele: $\ln 1 = 0$ und $\log_3 3 = 1$, $\lg 10 = 1$, $\ln e = 1$

W2 Die Potenzschreibweise $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ ist auch bei der Arbeit mit Logarithmen wichtig, z. B. $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$. Insbesondere gilt
 $\underbrace{0,000\dots 0 1}_{k\text{-mal } 0} = 10^{-k}$, z. B. $\underbrace{0,000 1}_{4\text{-mal } 0} = 10^{-4}$.

W4 Das Lösen von **Exponentialgleichungen**, bei denen die Unbekannte eine Hochzahl ist (oder in der Hochzahl vorkommt), geschieht durch sogenanntes **Logarithmieren**: Man wendet den Logarithmus (beliebige Basis) auf beiden Seiten der Gleichung an und mit der dritten Rechenregel $\rightarrow$ G2 wird die Hochzahl „hinuntergezogen“, bevor weiter umgeformt wird.

Beispiel: $2^{3x} = 5 \Rightarrow \ln 2^{3x} = \ln 5 \Rightarrow 3x \cdot \ln 2 = \ln 5 \Rightarrow \dots$

„Logarithmieren“ (hier zur Basis e) dritte Rechenregel für Logarithmen

W3 Auch die Umwandlung von Wurzel- ausdrücken in Potenzschreibweise hilft bei der Vereinfachung von Logarithmen.

Es gilt $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ und daher
 $\log \sqrt[n]{x^m} = \log x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \cdot \log x$.

Beispiele

B 1 Berechne ohne Taschenrechner, gib dabei jeden deiner Umformungsschritte an. a) $\log_3 81$ b) $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$

Wie berechne ich einen Logarithmus ohne Taschenrechner?

1 Den Numerus c im Ausdruck $\log_a c$ als eine Potenz der Basis a schreiben

a) Wir finden durch Probieren mit dem Taschenrechner heraus, welche Potenz von 3 die Zahl 81 ergibt: $81 = 3^4$.
 $\log_3 81 = \log_3 3^4$

b) Wir verwenden $\rightarrow W2$ und $\rightarrow W3$ und erhalten:

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \ln \frac{1}{\sqrt{e}} = \ln e^{-\frac{1}{2}}$$

2 Die Hochzahl „vor den Logarithmus ziehen“; wegen $\log_a a = 1$ ist sie das Ergebnis

Wir verwenden die dritte Regel aus $\rightarrow G2$ und anschließend $\rightarrow W1$.

$$\log_3 3^4 = 4 \cdot \underbrace{\log_3 3}_1 = 4 \quad (\rightarrow W1)$$

$$\ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \underbrace{\ln e}_1 = -\frac{1}{2} \quad (\rightarrow W1)$$

B 2 Fasse den Ausdruck $2 \cdot \log x - 3 \cdot \log y + \frac{1}{2} \cdot \log z - \log w$ zu einem einzigen Logarithmus zusammen.

Wie fasse ich eine Summe von Logarithmen zusammen?

1 Faktoren bei Logarithmen als Hochzahlen in die Logarithmen schreiben

Wir wenden die dritte Regel aus $\rightarrow G2$ an:

$$2 \cdot \log x - 3 \cdot \log y + \frac{1}{2} \cdot \log z - \log w = \log x^2 - \log y^3 + \log z^{\frac{1}{2}} - \log w$$

2 Alle Logarithmen zu einem Logarithmus zusammenfassen, wobei der Numerus aller Logarithmen mit positivem Vorzeichen im Zähler und der Numerus aller Logarithmen mit negativem Vorzeichen im Nenner des Logarithmus zu stehen kommt

$$\log x^2 - \log y^3 + \log z^{\frac{1}{2}} - \log w = \log \frac{x^2 \cdot z^{\frac{1}{2}}}{y^3 \cdot w}$$

B 3 Löse die Gleichung $3^{2x-1} = 25$.

Wie löse ich eine Exponentialgleichung?

1 Auf beiden Seiten der Gleichung vor die Terme einen Logarithmus schreiben, z. B. $\ln$ oder $\lg$

Wir verwenden laut $\rightarrow W4$ dafür auf beiden Seiten z. B. den dekadischen Logarithmus $\lg$ (Basis 10).
 $\lg 3^{2x-1} = \lg 25$

2 Den Term im Exponenten als Faktor „vor den Logarithmus ziehen“

Da der Term im Exponenten eine Strichrechnung enthält, setzen wir diesen in Klammern.
 $(2x - 1) \cdot \lg 3 = \lg 25$

3 Die erhaltene Gleichung mit Äquivalenzumformungen lösen

$$\begin{aligned} (2x - 1) \cdot \lg 3 &= \lg 25 & | : \lg 3 \\ 2x - 1 &= \frac{\lg 25}{\lg 3} & | + 1 \\ 2x &= \frac{\lg 25}{\lg 3} + 1 & | : 2 \\ x &= \left(\frac{\lg 25}{\lg 3} + 1 \right) : 2 \\ x &\approx 1,965 \end{aligned}$$



Aufgaben zu den Beispielen

B 1 **A** Berechne ohne Taschenrechner, gib dabei jeden deiner Umformungsschritte an. a) $\log_2 64$ b) $\lg 0,001$

1 Den Numerus c im Ausdruck $\log_a c$ als eine Potenz der Basis a schreiben

a) Welche Potenz von 2 ergibt 64?

$$64 = 2^{\square}$$

$$\log_2 64 = \log_2 2^{\square}$$

b) $\lg$ steht für $\log_{10}$. Wir verwenden daher $\rightarrow$ W2:

$$\underbrace{0,001}_{\text{-mal } 0} = 10^{\square} \Rightarrow$$

$$\lg 0,001 = \lg 10^{\square}$$

2 Die Hochzahl „vor den Logarithmus ziehen“; wegen $\log_a a = 1$ ist sie das Ergebnis

$$\log_2 2^{\text{G2}} = \square \cdot \log_2 \square = \square$$

$$\lg 10^{\text{G2}} = \square \cdot \lg \square = \square$$

B 2 **A** Fasse den Ausdruck $4 \cdot \log a - 5 \cdot \log b + \frac{1}{3} \cdot \log c - \log d$ zu einem einzigen Logarithmus zusammen.

1 Faktoren bei Logarithmen als Hochzahlen in die Logarithmen schreiben

$$4 \cdot \log a - 5 \cdot \log b + \frac{1}{3} \cdot \log c - \log d = \log a^{\square} - \log b^{\square} + \log c^{\square} - \log d$$

2 Alle Logarithmen zu einem Logarithmus zusammenfassen, wobei der Numerus aller Logarithmen mit positivem Vorzeichen im Zähler und der Numerus aller Logarithmen mit negativem Vorzeichen im Nenner des Logarithmus zu stehen kommt

$$\log a^4 - \log b^5 + \log c^{\frac{1}{3}} - \log d = \log \frac{\square}{\square}$$

B 3 **A** Löse die Gleichung $4^{3x+2} = 37$.

1 Auf beiden Seiten der Gleichung vor die Terme einen Logarithmus schreiben, z. B. $\ln$ oder $\lg$

$$\text{Verwende z. B. } \lg: \square \cdot 4^{3x+2} = \square \cdot 37$$

2 Den Term im Exponenten als Faktor „vor den Logarithmus ziehen“

$$\square \cdot \lg 4 = \lg 37$$

3 Die erhaltene Gleichung mit Äquivalenzumformungen lösen

$$(3x+2) \cdot \lg 4 = \lg 37 \quad | \quad \square$$

$$\square$$

$$\square$$

$$\square$$

$$\square$$

$$x \approx \square$$

Hinweis: Die Tasten $\ln$ und $\log$ findest du auf jedem Taschenrechner. $\log$ steht dabei für $\lg = \log_{10}$.

Logarithmen

Aufgaben

A 1 Berechne den Logarithmus mit dem Taschenrechner und runde wenn nötig auf zwei Kommastellen.



a) $\ln 2 \approx 0,69$

b) $\ln 0,5 \approx$ c) $\ln e =$ d) $\ln e^2 =$ e) $\lg 500 \approx$ f) $\lg \sqrt{10} =$ g) $\lg 100 =$

A 2 Berechne den Logarithmus.

→ B 1
→ G 3



a) $\log_7 49 = 2$, da $49 = 7^2$ b) $\log_a a^8 = 8 \cdot \underbrace{\log_a a}_1 = 8$

c) $\log_{10} 1000$ d) $\log_5 625$ e) $\log_2 16$ f) $\log_a a^{2x}$ g) $\lg 10$ h) $\ln e^{\frac{1}{2}}$ i) $\ln e^{31}$

A 3 Berechne den Logarithmus.

→ B 1
→ W 2



a) $\log_5 \frac{1}{5^3} = \log_5 5^{-3} = -3 \cdot \underbrace{\log_5 5}_1 = -3$

c) $\log_7 \frac{1}{7^6} = \log_7 7^{-6} = -6 \cdot \underbrace{\log_7 7}_1 = -6$

b) $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 2^{-5} = -5 \cdot \underbrace{\log_2 2}_1 = -5$

d) $\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3 \cdot \underbrace{\log_3 3}_1 = -3$

e) $\log_{10} \frac{1}{10000}$ f) $\log_a \frac{1}{a}$ g) $\log_x \frac{1}{x^9}$ h) $\log_{10} 0,00001$ i) $\lg \frac{1}{0,001}$ j) $\ln \frac{1}{e}$ k) $\ln \frac{1}{e}$

A 4 Berechne den Logarithmus.

→ B 1
→ W 3



a) $\log_4 \sqrt[3]{4} = \log_4 4^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\log_4 4}_1 = \frac{1}{3}$

b) $\log_3 \sqrt[4]{3^3} = \log_3 3^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \underbrace{\log_3 3}_1 = \frac{3}{4}$

c) $\log_a \sqrt{a}$ d) $\log_a \sqrt[7]{a^4}$ e) $\log_a \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ f) $\log_a \sqrt{\frac{1}{a^5}}$ g) $\lg \sqrt[5]{\frac{1}{10}}$ h) $\ln \sqrt[3]{e}$ i) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{81}}$

A 5 Fasse den Ausdruck aus mehreren Logarithmen zu einem einzigen Logarithmus zusammen.

→ B 2



a) $\frac{1}{2} \log a - 3 \log b + 2 \log c = \log a^{\frac{1}{2}} - \log b^3 + \log c^2 = \log \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot c^2}{b^3}$

b) $2 \log(a+b) - \log b - \frac{1}{2} \log(a-b) = \log(a+b)^2 - \log b - \log(a-b)^{\frac{1}{2}} = \log \frac{(a+b)^2}{b \cdot (a-b)^{\frac{1}{2}}}$

c) $\log a + \log b - 2 \log c$ e) $\log a - \frac{2}{3} \log b + \frac{1}{2} \log c - \log d$ g) $2 \log a + 3 \log(a+b)$

d) $\frac{1}{3} \log a - \log b - \frac{1}{2} \log c$ f) $\log(a+b) + 5 \log(a-b) - 4 \log b$ h) $\log \frac{a}{a+b} - \log b + \frac{1}{2} \log(a-b)$

A 6 Ergänze die Textlücke durch die richtige Rechenoperation (plus, minus, mal, durch, hoch).

a) Der Logarithmus zweier miteinander multiplizierter Terme ist Logarithmus des ersten Faktors plus Logarithmus des zweiten Faktors.

b) Der Logarithmus eines Quotienten ist Logarithmus des Dividenden _____ Logarithmus des Divisors.

c) Der Logarithmus einer Potenz ist Hochzahl _____ Logarithmus der Basis.

A 7 Kreuze die korrekten Umformungen an.

→ G 2

$\log(a+b) = \log a + \log b$	$\log(a-b) = \frac{\log a}{\log b}$	$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$	$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$
☐	☐	☐	☐



A 8

Kreuze alle Terme an, die zum Ausdruck $\log_2 2a$ umgeformt werden können.

→ G2
→ W1

$2 \log_2 a$	$\log_2 a + \log_2 a$	$\log_2 2 \cdot \log_2 a$	$1 + \log_2 a$	$\log_2 2 + \log_2 a$
☐	☐	☐	☐	☐

A 9

Schreibe den Ausdruck als Summe von Logarithmen.

→ G2



a) $\log \frac{3 \cdot a^2 \cdot (a+b)}{c} = \log 3 + \log a^2 + \log(a+b) - \log c = \log 3 + 2 \log a + \log(a+b) - \log c$

b) $\log \frac{(x-y) \cdot (x+y)}{x^2} = \log \square \cdot \log \square = \log \square = \log \square \cdot \log \square$

c) $\log \frac{(a-b)^2 \cdot a^3}{(a+b)}$ d) $\log \frac{5 \cdot (a-b)}{(a+b)^2 \cdot c}$ e) $\log \frac{4 \cdot \sqrt[3]{a-b}}{a^2}$ f) $\log \frac{1}{a+b} \sqrt{\frac{a-b}{a}}$

A 10

Vereinfache den Ausdruck unter Anwendung der Rechenregeln für Logarithmen.



a) $\log_{10} 100x - \log_{10} x = \log_{10} \frac{100x}{x} = \log_{10} 100 = 2$

b) $\log_2 8x^2 + \log_2 2x$ c) $\log_a 10a^2 - 2 \log_a \sqrt{a}$ d) $\lg 100a - \lg \frac{a}{10}$

A 11

Löse die Logarithmusgleichung.



a) $\log_5 x = 3 \Leftrightarrow x = 5^3 = 125$ d) $\log_x 10000 = 4 \Leftrightarrow x^4 = 10000 \quad \sqrt[4]{} \quad x = 10$

b) $\log_6 x = 2 \Leftrightarrow x = \square = \square$ e) $\log_x 16 = 2$ g) $\log_x 0,0001 = -4$

c) $\log_{100} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \square = \square$ f) $\log_x \frac{1}{27} = 3$ h) $\log_x \frac{1}{e^2} = -2$

A 12

Löse die Gleichung durch Logarithmieren.

→ W4



a) $3^x = 5$ $\lg 3^x = \lg 5$ $x \cdot \lg 3 = \lg 5$ $x = \frac{\lg 5}{\lg 3} \approx 1,465$ b) $2^x = 7$ c) $8^x = 2$ d) $4^x = 15$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 32$

A 13

Löse die Exponentialgleichung unter Beachtung des Hinweises.

→ B3



a) $3 \cdot 2^{1-4x} = 12$ Hinweis: Dividiere zuerst durch 3, um die Potenz zu isolieren.
b) $4^{9x+5} = 5^{3x-1}$ Hinweis: Logarithmiere gleich.
c) $7^{2x-5} = 19 \cdot 7^{x+2}$ Hinweis: Dividiere zuerst durch 7^{x+2} und fasse zu einer Potenz zusammen.
d) $9^{1-x} = 8 \cdot 3^{7x+11}$ Hinweis: Ersetze die Basis 9 durch 3^2 und fasse zu einer Potenz zusammen.

A 14

Bestimme die gesuchte Unbekannte.



a) $a \cdot b^{3x} = c, x = ?$ $a \cdot b^{3x} = c \quad | : a$
 $b^{3x} = \frac{c}{a} \quad | \log$
 $\log b^{3x} = \log \frac{c}{a}$
 $3x \cdot \log b = \log \frac{c}{a} \quad | : 3 \log b$
 $x = \frac{\log \frac{c}{a}}{3 \log b}$

b) $N_0 \cdot a^{0,2 \cdot t} = N_1, t = ?$ c) $T = C \cdot (12 - a^{4x}), x = ?$ d) $(n+1) \cdot m^{\frac{50}{x}} = k, x = ?$

A 15

Löse die Logarithmusgleichung mit Technologie.



a) $\lg 3 + \lg 3x = \lg(x+16)$ b) $\ln 3x + \ln x = \ln(2x+1)$

Lösungen



Logarithmen

A 16

Gegeben ist der Ausdruck $\log_c a = b$.

Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Wenn ① potenziert wird, lautet das Ergebnis ②.

①	
die Basis a mit der Hochzahl b	☐
die Basis a mit der Hochzahl c	☐
die Basis c mit der Hochzahl b	☐

②	
☐	a
☐	b
☐	c

A 17

Ordne den Termen (links) jeweils denjenigen Term (rechts) zu, der eine korrekte Umformung darstellt.

$\log \sqrt{x}$	☐	A	$\log x + \log x$
$\log \frac{1}{x^2}$	☐	B	$\sqrt{\log x}$
$\log \frac{1}{2} x$	☐	C	$(\log x)^2$
$\log x^2$	☐	D	$-2 \log x$
		E	$\frac{1}{2} \log x$
		F	$\log x - \log 2$

A 18

Kreuze die drei zutreffenden Aussagen an.

$\log_2 -2 = -1$	☐
$\log_2 1 = 0$	☐
$\ln e = 2,718\dots$	☐
$\ln e = \lg 10$	☐
$\lg 10000 = \log_a a^4$	☐

A 19

Berechne den Ausdruck $\log_{1000} 1000000$ und begründe dein Ergebnis.

A 20

Schreibe den Ausdruck $\log \frac{a^2 \cdot b^3}{(a+b)^{-2}}$ als Summe von Logarithmen, wobei in den einzelnen Logarithmen keine Potenzen mehr stehen sollen.

$$\log \frac{a^2 \cdot b^3}{(a+b)^{-2}} = \underline{\hspace{10cm}}$$

A 21

Schreibe den Ausdruck $2 \log a - 3 \log(a+b) + 4 \log(a-b)$ mit nur einem einzigen Logarithmus.

$$2 \log a - 3 \log(a+b) + 4 \log(a-b) = \underline{\hspace{10cm}}$$

A 22

Löse die Gleichung $15 = 2 \cdot 3^{2x+1}$ nach x .

$$x \approx \underline{\hspace{2cm}}$$

A 23

Gegeben ist die Potenz $a^n = 343$ mit $n \in \mathbb{R}$.

- Wie lautet der Logarithmus von 343 zur Basis a ?
- Begründe, warum $\log_a 343^2 = 2n$ gilt.
- Löse die Gleichung $a^n = 343$ für $a = 7$ nach n .



Lineare und Betragsungleichungen

3

Negative Zahlen stellen so einiges auf den Kopf, wie folgendes Zahlenrätsel zeigt: „Eine negative Zahl, die kleiner oder gleich -1 ist, wird mit -1 multipliziert. Wie groß ist die neue Zahl mindestens?“ Die Antwort lautet 1 . Um dabei keinen Knopf im Kopf zu bekommen, nehmen wir uns in diesem Kapitel Zeit, uns mit den Basics der Ungleichungen auseinanderzusetzen.



Grundlagen

G1 Term $1 < \text{Term } 2$ bedeutet, dass der Wert des Terms 1 kleiner ist als jener des Terms 2. Term $1 > \text{Term } 2$ bedeutet, dass der Wert des Terms 1 größer ist als jener des Terms 2. Bei der Multiplikation einer Ungleichung mit einer negativen Zahl und bei der Division durch eine negative Zahl wechselt das **Vergleichszeichen** von $<$ auf $>$ bzw. von $\leq$ (kleiner-gleich) auf $\geq$ (größer-gleich) und umgekehrt. Beispiel: $-x > 2 \Leftrightarrow x < -2$

G2 Unter der **Lösungsmenge** L einer **linearen Ungleichung in einer Variablen** versteht man die Menge aller Zahlen, die die Ungleichung erfüllen, d. h. eingesetzt eine wahre Aussage ergeben. Beispiel: Die Zahl 3 ist in der Lösungsmenge L der Ungleichung $x < 2x$ enthalten (geschrieben: $3 \in L$), da $3 < 6$ eine wahre Aussage ist. Die Zahl -3 ist in der Lösungsmenge L nicht enthalten ($-3 \notin L$), da $-3 < -6$ eine falsche Aussage ist.

G3 Die Grundmenge (z. B. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$) gibt an, in welchem Zahlenbereich Lösungen gesucht werden. Die Lösungsmenge einer Ungleichung wird auf drei Arten angegeben:
aufzählend, z. B. $L = \{\dots, -1, 0, 1\}$ (die Lösungsmenge der Ungleichung $2x < 4$ mit $x \in \mathbb{Z}$)
beschreibend, z. B. $L = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2\}$ (die Lösungsmenge der Ungleichung $2x < 4$ mit $x \in \mathbb{Q}$)
in Intervallschreibweise, z. B. $L = (-\infty; 2)$ (die Lösungsmenge der Ungleichung $2x < 4$ mit $x \in \mathbb{R}$)

G4 Der **Betrag einer Zahl** a wird mit $|a|$ geschrieben und gibt den Abstand dieser Zahl zur Zahl 0 auf der Zahlengeraden an. Da Abstände immer positiv sind, gibt der Betrag einfach den positiven Wert der Zahl an. Beispiele: $|-5| = 5$ und $|5| = 5$

G5 Bei der Darstellung einer Lösungsmenge auf der Zahlengeraden markiert man jenen Bereich, in dem alle Zahlen der Lösungsmenge liegen. Bei $<$ und $>$ wird an der Grenze ein leerer Kreis (Zahl gehört nicht dazu) und bei $\leq$ und $\geq$ ein ausgefüllter Kreis (Zahl gehört dazu) gezeichnet.



Werkzeuge

W1 Zwei (oder mehrere) Ungleichungen werden auch als ein **System von Ungleichungen** bezeichnet. Es gibt zwei Arten von Ungleichungssystemen (bei $x \in \mathbb{R}$):
1. Die Lösungen müssen Ungleichung 1 **und** Ungleichung 2 erfüllen. Die Lösungsmenge ist (außer in den Sonderfällen $L = \{ \}$ und $L = \{a\}$) ein einziges Intervall. Beispiel: $-3 < 2x + 5$ **und** $2x + 5 \leq 3$ ergibt $L = (-4, -1]$. (Bemerkung: Das System im Beispiel kann auch kürzer geschrieben werden: $-3 < 2x + 5 \leq 3$.)
2. Die Lösungen müssen Ungleichung 1 **oder** Ungleichung 2 erfüllen. Die Lösungsmenge ist die Vereinigung zweier Intervalle. Beispiel: $x + 1 < -3$ **oder** $5 \leq x + 3$ hat die Lösungsmenge $L = (-\infty; -4) \cup [2; \infty)$.

W2 Für Betragsungleichungen der Form $|\text{Term}| \leq a$ bzw. $|\text{Term}| \geq a$ gibt es Merkgeregeln.
1. Fall: $|\text{Term}| \leq a$
 $\Leftrightarrow -a \leq \text{Term} \text{ und } \text{Term} \leq a$
2. Fall: $|\text{Term}| \geq a$
 $\Leftrightarrow -a \geq \text{Term} \text{ oder } \text{Term} \geq a$

Beispiele

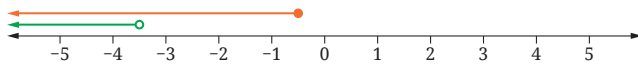
B 1 Bestimme die Lösungsmenge des Ungleichungssystems $8x + 3 \leq 2x$ und $x + 7 < -x$.

Wie löse ich ein System zweier linearer Ungleichungen in einer Variablen?

1 Die Lösungsmengen der beiden Ungleichungen ermitteln

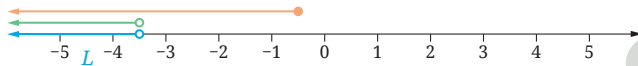
$$\begin{array}{ll} 8x + 3 \leq 2x & | -3 \\ 8x \leq 2x - 3 & | -2x \\ 6x \leq -3 & | :6 \\ x \leq -0,5 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} x + 7 < -x & | -7 \\ x < -x - 7 & | +x \\ 2x < -7 & | :2 \\ x < -3,5 & \end{array}$$

2 Die beiden Lösungsmengen auf einer Zahlengeraden mit Pfeilen darstellen



3 Anhand der Angabe (und/oder) feststellen, ob die Lösungsmenge der Überlappungsbereich oder die Vereinigung der beiden Pfeile ist, und die Lösungsmenge angeben

Laut Angabe müssen die erste **und** die zweite Ungleichung erfüllt sein, die Lösungsmenge ist daher ein einzelnes Intervall ($\rightarrow$ W1). Der Überlappungsbereich ist der Bereich, den beide Lösungsmengen überdecken.



$$L = (-\infty; -3,5)$$

B 2 Bestimme die Lösungsmenge der Betragsungleichung.

a) $|2x + 5| < 3$

b) $|-x + 4| \geq 6$

Wie löse ich eine Betragsungleichung?

1 Die Betragsungleichung als Ungleichungssystem ohne Beträge schreiben

Wir verwenden $\rightarrow$ W2.

1. Ungleichung: $-3 < 2x + 5$ und
2. Ungleichung: $2x + 5 < 3$

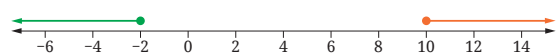
1. Ungleichung: $-6 \geq -x + 4$ oder
2. Ungleichung: $-x + 4 \geq 6$

2 Die beiden Ungleichungen lösen und auf einer Zahlengeraden darstellen

1. Ungleichung: $-3 < 2x + 5 \Rightarrow x > -4$
2. Ungleichung: $2x + 5 < 3 \Rightarrow x < -1$



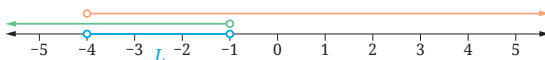
1. Ungleichung: $-6 \geq -x + 4 \Rightarrow x \geq 10$
2. Ungleichung: $-x + 4 \geq 6 \Rightarrow x \leq -2$



3 Die Lösungsmenge in Intervallschreibweise angeben

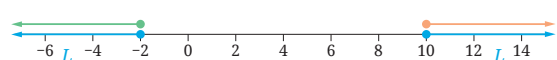
Wir verwenden $\rightarrow$ W1, um zu erkennen, ob die Lösungsmenge aus einem oder aus zwei Intervallen besteht.

Es gelten Ungleichung 1 **und** Ungleichung 2.
 $\Rightarrow L$ besteht aus **einem** Intervall.



$$L = (-4; -1)$$

Es gilt Ungleichung 1 **oder** Ungleichung 2.
 $\Rightarrow L$ besteht aus **zwei** Intervallen.



$$L = (-\infty; -2] \cup [10; \infty)$$



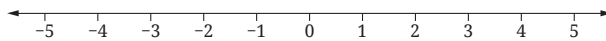
Aufgaben zu den Beispielen

B 1 **A** Bestimme die Lösungsmenge des Ungleichungssystems $4x - 9 < x$ **oder** $x - 7 \geq -x$.

1 Die Lösungsmengen der beiden Ungleichungen ermitteln

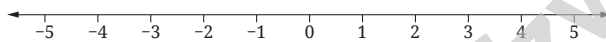
$4x - 9 < x$	$ + \square$	$x - 7 \geq -x$	$ + \square$
$4x < x + \square$	$ - \square$	$x \geq -x + \square$	$ + \square$
$\square x < \square$	$: \square$	$\square x \geq \square$	$: \square$
$x < \square$		$x \geq \square$	

2 Die beiden Lösungsmengen auf einer Zahlengeraden mit Pfeilen darstellen



3 Anhand der Angabe (und/oder) feststellen, ob die Lösungsmenge der Überlappungsbereich oder die Vereinigung der beiden Pfeile ist, und die Lösungsmenge angeben

Laut Angabe muss die erste _____ die zweite Ungleichung erfüllt sein, die Lösungsmenge ist daher die _____ zweier Intervalle.



$L =$ _____

B 2 **A** Bestimme die Lösungsmenge der Betragsungleichung.

a) $|4 - 2x| \leq 6$

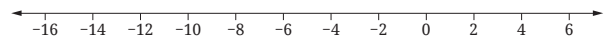
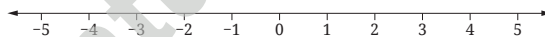
b) $|x + 5| > 7$

1 Die Betragsungleichung als Ungleichungssystem ohne Beträge schreiben

1. Ungleichung: _____ **und** 1. Ungleichung: _____ **oder**
 2. Ungleichung: _____ 2. Ungleichung: _____

2 Die beiden Ungleichungen lösen und auf einer Zahlengeraden darstellen

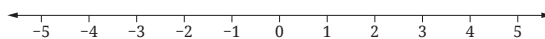
1. Ungleichung: $-6 \leq 4 - 2x \Rightarrow$ _____ 1. Ungleichung: $-7 > x + 5 \Rightarrow$ _____
 2. Ungleichung: $4 - 2x \leq 6 \Rightarrow$ _____ 2. Ungleichung: $x + 5 > 7 \Rightarrow$ _____



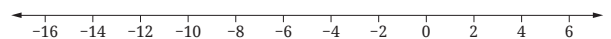
3 Die Lösungsmenge in Intervallschreibweise angeben

Es gelten Ungleichung 1 _____ Ungleichung 2.
 $\Rightarrow L$ besteht aus _____ Intervall.

Es gilt Ungleichung 1 _____ Ungleichung 2.
 $\Rightarrow L$ besteht aus _____ Intervallen.



$L =$ _____

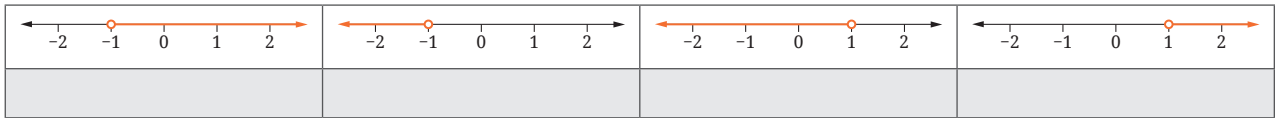


$L =$ _____

Aufgaben

A 1

Ordne den grafisch dargestellten Lösungsmengen jeweils die zugehörige Ungleichung zu.

→ G1
→ G5

A	B	C	D
$-x > -1$	$-x < 1$	$-1 > x$	$x - 1 > 0$

A 2

Gegeben ist die Ungleichung $1 - 2x < 4x + 13$. Kreuze alle ganzen Zahlen an, die diese Ungleichung erfüllen.

→ G2

-9	-2	-1	0	$\frac{3}{2}$
☐	☐	☐	☐	☐

A 3

Gegeben ist die Ungleichung $x < -2$. Ordne den Lösungsmengen dieser Ungleichung jeweils die zugrundeliegende Grundmenge zu.

→ G3

$L = \{\dots, -5, -4, -3\}$		A	$G = \mathbb{N}$
$L = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < -2\}$		B	$G = \mathbb{Z}$
$L = (-\infty; -2)$		C	$G = \mathbb{Q}$
$L = \{ \}$		D	$G = \mathbb{R}$

A 4

Löse die Ungleichung und stelle die Lösungsmenge auf der abgebildeten Zahlengeraden dar.

→ G5



a) $3x - 1 > 2 + x$	Lösung: $x > 1,5$	
b) $4x - 9 \leq 3 - 2x$	Lösung: _____	
c) $x + 12 \geq -8x - 15$	Lösung: _____	
d) $x - 1 > -(x + 1)$	Lösung: _____	

A 5

Überprüfe durch Einsetzen, ob die angegebene Zahl in der Lösungsmenge der Ungleichungskette mit $G = \mathbb{R}$ enthalten ist.

→ G2

a) $4 \in L?$ $1 + x < 2x - 3 \leq 9 + x$ $1 + 4 < 2 \cdot 4 - 3 \leq 9 + 4$ $5 < 5 \leq 13$ falsche Aussage $\Rightarrow 4 \notin L$	b) $3 \in L?$ $1 - x < -2x + 5 \leq x + 2$ $1 - \square < -2 \cdot \square + 5 \leq \square + 2$ $\square < \square \leq \square$ _____ $\Rightarrow 3 \square L$	c) $-1 \in L?$ $2x \leq 3x + 6 \leq -7 - 4x$ $2 \cdot \square \leq 3 \cdot \square + 6 \leq -7 - 4 \cdot \square$ $\square \leq \square \leq \square$ _____ $\Rightarrow -1 \square L$
---	---	--

A 6

Kreuze das Ungleichungssystem an, das kein Intervall als Lösungsmenge hat, sondern die leere Menge.

→ W1

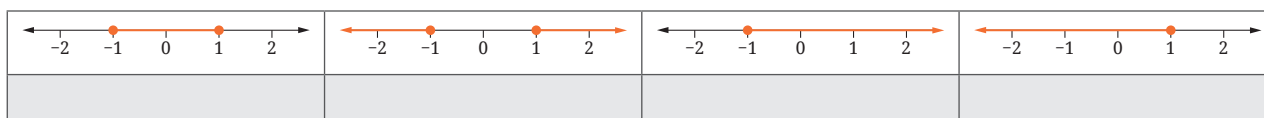
$x > 1$ und $x < -1$	$x \leq 1$ und $x < -1$	$x > 1$ und $x \geq -1$	$x \leq 1$ und $x \geq -1$
☐	☐	☐	☐



A 7

Ordne den grafisch dargestellten Lösungsmengen jeweils das zugehörige Ungleichungssystem zu.

→ W1



A	B	C	D
$x \leq 1$ und $x \leq 2$	$x \leq 1$ und $x \geq -1$	$x \leq -1$ oder $x \geq 1$	$x \geq -1$ und $x \geq -2$

A 8

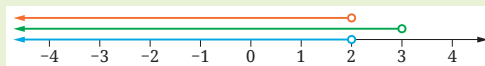
Stelle die Lösungsmenge des Ungleichungssystems zuerst grafisch dar und gib sie anschließend in Intervallschreibweise an.

→ G5

→ W1

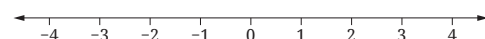


a) $x < 2$ und $x < 3$



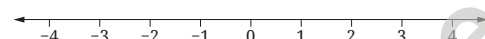
$L = (-\infty; 2)$

b) $x \geq -2$ und $x < 3$



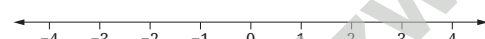
$L =$ _____

c) $x \leq -1$ oder $x > 2$



$L =$ _____

d) $x > 1$ oder $x \leq -1$



$L =$ _____

A 9

Überprüfe, ob die angegebene Zahl in der Lösungsmenge der Ungleichung enthalten ist.

→ G4

a) $-2 \in L?$

$$|x - 3| \leq 4$$

$$|-2 - 3| \leq 4$$

$$|-5| \leq 4$$

$$5 \leq 4$$

falsche Aussage $\Rightarrow -2 \notin L$

b) $-3 \in L?$

$$|1 - x| > 4$$

$$|1 - \square| > 4$$

$$|\square| > \square$$

$$\square > \square$$

$\Rightarrow -3 \square L$

c) $9 \in L?$

$$|10 - 2x| \geq 6$$

$$|10 - 2 \cdot \square| \geq 6$$

$$|\square| \geq \square$$

$$\square \geq \square$$

$\Rightarrow 9 \square L$

A 10

Ordne den Betragsungleichungen jeweils das äquivalente Ungleichungssystem zu.

→ W2

$ 1 - x \geq 2$		A	$-2 < x + 1$ und $x + 1 < 2$
$ x - 1 \leq 2$		B	$-2 \leq x - 1$ und $x - 1 \leq 2$
$ x + 1 > 2$		C	$-2 > x + 1$ oder $x + 1 > 2$
$ -1 - x < 2$		D	$-2 \geq 1 - x$ oder $1 - x \geq 2$

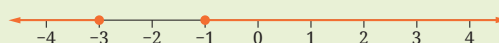
A 11

Löse die Gleichung und stelle ihre Lösungsmenge auf der Zahlengeraden dar.

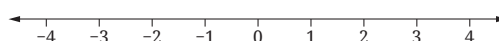
→ B2



a) $|2 + x| \geq 1 \Rightarrow -1 \geq 2 + x$ oder $2 + x \geq 1$
 $-3 \geq x$ oder $x \geq -1$
 $L = (-\infty; -3] \cup [-1; \infty)$



b) $|x - 3| < 1 \Rightarrow \square < x - 3$ und $x - 3 < \square$
 $\square < x$ und $x < \square$
 $L = (\square; \square)$



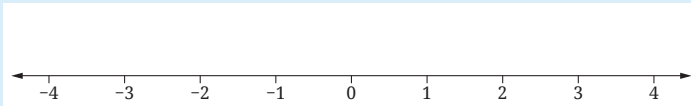
c) $|1 - x| > 2$ d) $|x + 1| \geq 1$ e) $|x| \leq 4$ f) $|2x - 3| < x$

Lösungen



Lineare und Betragsungleichungen

- A 12** Stelle die Lösungsmenge der Ungleichungskette $-5x + 1 \leq 3 - 6x < 9$ auf der Zahlengeraden dar.



- A 13** Gegeben ist die Ungleichung $-2x > 2$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Division der Ungleichung durch die Zahl -2 ergibt ①, da ②.

①	②
$x > -1$ ☐	☐ sich bei Division durch eine negative Zahl das Vergleichszeichen umkehrt
$x \leq -1$ ☐	☐ Umformungen von Ungleichungen den gleichen Regeln folgen, wie sie bei Gleichungen gelten
$x < -1$ ☐	☐ bei Division durch eine negative Zahl das Ergebnis ebenfalls negativ sein muss

- A 14** Die Lösungsmenge der Ungleichung $|x| \leq 2$ lautet $L = \{0, 1, 2\}$. Gib an, für welche der möglichen Grundmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ diese Aussage wahr ist.

$G =$ _____

- A 15** In einer Zeitung liest man: „Die Arbeitslosenquote R war in den letzten zwei Jahren niemals größer als 7 %, jedoch stets oberhalb der 5 %-Marke.“ Stelle diese Aussage als Ungleichungskette dar.

- A 16** Eine Firma produziert Nägel mit einer Solllänge von 10 cm. Es werden Abweichungen von bis zu 0,1 cm toleriert. Gib den Bereich für die zulässige Länge L der Nägel in cm als Ungleichungskette und als Intervall an.

Toleranzbereich als Ungleichungskette: _____

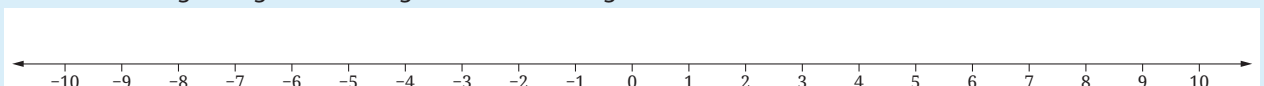
Toleranzbereich als Intervall: _____

- A 17** Kreuze die Ungleichungssysteme an, die für $x \in \mathbb{R}$ eine leere Lösungsmenge haben.

$-3 < x < 3$	☐
$-3 > x$ und $x > 3$	☐
$x < -3$ oder $x > 3$	☐
$ x < -3$	☐
$ x > 3$	☐

- A 18** Gegeben ist die Ungleichung $|x + 5| \leq 2$.

- Stelle die Ungleichung ohne Betrag, d. h. als System zweier Ungleichungen dar.
- Besitzt diese Ungleichung natürliche Zahlen als Lösung? Gib eine Begründung für deine Antwort an, ohne die Ungleichung zu lösen.
- Die Ungleichung soll für $x \in \mathbb{R}$ gelöst werden. Gib die Lösungsmenge in Intervallschreibweise an.
- Stelle die Lösungsmenge auf der abgebildeten Zahlengeraden dar.



Stichwortverzeichnis

A

abhängige Variable 73
 Abnahme
 (bei Abnahmeprozessen) 55
 absolute Änderung 43
 absolute Häufigkeit 145
 Abstandsformel
 – parallele Geraden 127
 – Punkt – Ebene **133**, 139
 – Punkt – Gerade 127
 Abtragen einer Strecke 121
 Achsensymmetrie 37
 Amplitude 67
 Änderungsfaktor **43**, 55, 61
 Änderungskonstante 55
 Anfangswert (Exponentialfunktion) 49
 arithmetische Folge 85
 arithmetische Reihe 101
 arithmetisches Mittel 157
 Asymptote 37
 aufzählende Schreibweise
 (Lösungsmenge) 19
 Ausgang 163
 Ausreißer 157

B

Balkendiagramm 145
 Basis
 – einer Potenz 7
 – eines Logarithmus 13
 Baumdiagramm 175
 bedingte Wahrscheinlichkeit 169
 begünstigt/benachteiligt 169
 beschränkte Folge 79
 Beschränktheit
 – einer arithmetischen Folge 85
 – einer geometrischen Folge 91
 beschreibende Schreibweise
 (Lösungsmenge) 19
 Betrag 19
 Betrag eines Vektors 115
 Betragsungleichung 20
 Boxplot 151
 Bruchungleichung 25

C

charakteristische Eigenschaft einer Exponentialfunktion 49

D

Datentypen 157
 dekadischer Logarithmus 13
 Differenz einer arithmetischen Folge 85
 Differenzenquotient 43
 divergent 79

E

Ebene im Raum 133
 Ebenengleichung 133
 empirische Standardabweichung 157
 empirische Varianz 157
 endliche Folge 101
 endliche Summe einer Folge 101
 Ereignis 163
 Euler'sche Zahl 13
 explizite Darstellung einer Folge 79
 Exponent 7
 Exponentialfunktion 49
 Exponentialgleichung 13
 exponentielles Modell 55
 Extrempunkt 31

F

Flächeninhaltsformeln für Figuren 121
 Folge 79
 Funktion in mehreren Variablen 73

G

Gegenereignis 163
 Gegenvektor 115
 Gegenwahrscheinlichkeit 163
 geometrische Folge 91
 geometrische Reihe 101
 gewichtetes Mittel 157
 Glieder einer Folge 79
 globales Maximum/Minimum 31
 Grad einer Polynomfunktion 31
 Grenzwert
 – einer Folge 79
 – einer Reihe 101
 Grundraum 163
 Grundtypen von Potenzfunktionen 37

H

Halbwertszeit 55
 Histogramm 145
 Hochpunkt 31

I

Index einer Folge 79
 Interquartilsabstand 151
 Intervallschreibweise
 (Lösungsmenge) 19

K

Kennzahlen eines Boxplots 151
 Komponenten eines Vektors 115
 konvergent 79
 Konvergenz
 – einer arithmetischen Folge 85
 – einer geometrischen Folge 91
 – einer Reihe 101

Koordinaten eines Vektors 115
 Koordinatenebene 133
 Kreisdiagramm 145
 Kreuzprodukt 121

L

Lagebeziehung
 – zwischen Gerade und Ebene 139
 – zwischen zwei Ebenen 139
 – zwischen zwei Geraden 127
 Länge eines Vektors 115
 Laplace-Wahrscheinlichkeit 163
 lineare Ungleichung
 – in einer Variablen 19
 – in zwei Variablen 25
 lineares Wachstum 61
 logarithmieren 13
 Logarithmus 13
 Logarithmusfunktion 65
 lokale Extremstelle 31
 Lösungsformeln für quadratische Gleichungen 25
 Lösungsmenge (Ungleichungen) 19

M

Maximum/Minimum 31
 Median 151, **157**
 mehrdimensionale Funktion 73
 mehrstufiger Zufallsversuch 175
 metrischer Datentyp 157
 Mittelpunkt einer Strecke 115
 Mittelwert 157
 mittlere Änderungsrate 43
 Modell des exponentiellen Wachstums 61
 Modell des linearen Wachstums 61
 Modus 157
 monoton fallend/steigend (Folge) 79
 monoton fallend/steigend (Funktion) 31
 Monotonie
 – einer arithmetischen Folge 85
 – einer Funktion 31
 – einer geometrischen Folge 91

N

natürlicher Logarithmus 7
 nominaler Datentyp 157
 Normalitätskriterium 115
 Normalvektordarstellung einer Ebene 133
 n -Tupel = n -dimensionaler Vektor 111
 Nullfolge 79
 Nullstelle 31
 Nullvektor 115
 Numerus 13

O

obere Schranke 79
ordinaler Datentyp 157

P

Parallelepipet: Volumen 121
Parallelitätskriterium 115
Parallelogramm: Flächeninhalt 121
Parameter einer Potenzfunktion 37
Parameterdarstellung
– einer Ebene 133
– einer Geraden im Raum 127
Periode 67
Periodenlänge 67
periodische Funktion 67
Pfadregel 175
Phasenverschiebung 67
Polynomfunktion 31
Potenz 7
Potenzfunktion 37
Prozentstreifen 145
Punktsymmetrie 37
Punktwolke(n)diagramm 145
quadratische Ungleichung 25

Q

Quartil 151
Quotient einer geometrischen Folge 91

R

$\mathbb{R}^n$ 111
Rechenregeln
– für Logarithmen 13
– für Potenzen 7
– für Wurzeln 7
Reihe 101
rekursive Darstellung 97
relative Änderung 43
relative Häufigkeit 145
– als Schätzwert für Wahrscheinlichkeit 163

S

Satz von Bayes 175
Säulendiagramm 145
Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit 163
Schnittpunkt zweier Geraden 131
Schranke einer Folge 79
Schwerpunkt eines Dreiecks 115
Schwingungsdauer 67
sicheres Ereignis 163
Sinusfunktion 67
Skalarprodukt 111
Spannweite 151, **157**
Spitze-minus-Schaft 115
Standardabweichung 157
Stängel-Blatt-Diagramm 145
streng monoton fallend/steigend (Folge) 79
streng monoton fallend/steigend (Funktion) 31
Streudiagramm 145
Streuungsmaße 157
Stufe eines Zufallsversuchs 175
Summe
– einer endlichen Folge 101
– einer geometrischen Reihe 101
System von Ungleichungen 19

T

Teilungspunkt 115
teilweises Wurzelziehen 8
Termdarstellung einer Folge 79
Tetraeder: Volumen 121
Tiefpunkt 31
Tupel 111

U

Umrechnung zwischen λ und α 55
unabhängige Ereignisse 169
unabhängige Variable 73
Ungleichungssystem 19
unmögliches Ereignis 163
untere Schranke 79

V

Variable, (un)abhängige 73
Varianz 157
Vektoraddition und -subtraktion 111
Vektorprodukt 121
Vergleichszeichen (Ungleichungen) 19
Vervielfachung eines Vektors 111
Vierfeldertafel 169
Volumenformeln für Körper 121

W

Wachstums- und Abnahmeprozesse 55, 61
Wachstumsfaktor 49, 55
Wachstumskonstante 55
Wahrscheinlichkeit 163
Weg-Zeit-Funktion 43
Winkel
– zwischen zwei Ebenen 139
– zwischen Gerade und Ebene 139
– zwischen zwei Geraden 127
– zwischen zwei Vektoren 115
Wurzelgleichung 11

Z

Zentralmaße 157
Zerfallskonstante 55
Ziehen mit/ohne Zurücklegen 175
Zufallsexperiment 163
Zufallsversuch 163
Zunahme (bei Wachstumsvorgängen) 55



MatheTutor – Dein Begleiter durch die 6. Klasse

Mit deinem **MatheTutor** sind die **Grundkompetenzen** der 6. Klasse kein Problem für dich! Er wiederholt mit dir von Grund auf den wichtigsten Stoff und übt alles ausführlich mit dir – wenn du willst in **mehr als 500 Aufgaben**.

Warum der MatheTutor so gut funktioniert? Er wurde von **Nachhilfe-Profis** entwickelt, die sich richtig gut damit auskennen, Mathematik einfach zu vermitteln. Dafür haben sie sich ein **erfolgreiches Lern- und Trainingssystem** ausgedacht:

1. **Informiere dich** zu Beginn jedes Kapitels über benötigte Grundlagen und praktische Werkzeuge für die anstehenden Aufgaben.
2. **Vollziehe nach**, wie du typische Aufgaben meisterst. Musterbeispiele weisen dir den Weg.
3. **Probiere selbst** eine solche Aufgabe zu lösen. Dabei kannst du dich am entsprechenden Musterbeispiel orientieren.
4. **Trainiere weiter** und lerne weitere Aufgabentypen kennen, natürlich mit Hilfestellungen. So gewinnst du nach und nach die nötige Sicherheit.
5. **Teste dich** selbst anhand von typischen Prüfungsaufgaben – wie bei Schularbeiten und bei der Matura!

Weiters findest du online:

- **Ausführliche Lösungen** mit Hinweisen und Erklärungen – auch zum Technologieeinsatz
- **Zusätzliche Probiere selbst-Aufgaben**
- **Alle Modellschritte** an einer Stelle als praktisches Hilfsmittel beim Lernen und Üben