MATHE TUTOR

Thomas Benes
Bojan Radenković

5 AHS

Grundkompetenztraining mit System

Technologieeinsatz berücksichtigt

Digitales Zusatzangebot:
Kommentierte Lösungen

HELBLING

Digitales Zusatzangebot

Die Lösungen und weitere digitale Zusatzangebote kannst du online über die Helbling-Website abrufen. Ruf dazu www.helbling.com/code auf und gib den Access Code ein (mit einer Münze oder dem Fingernagel freirubbeln).

Bildnachweis
Umschlag FatCamera – iStockphoto / 7 Christopher Fell – 123RF / 11 Anna Om – 123RF / 17 saiko3p – 123RF / 23 Podest: kchung – 123RF / 23 Publikum: Vitaly Pechkurou – 123RF / 27 Sebastien Decoret – 123RF / 33 anyka – 123RF / 39 PÃ©ter Gudella – 123RF / 45 ayphoto – 123RF / 51 Athapet Piruksa – 123RF / 57 viteethumb – 123RF / 61 Евгений Косцов – 123RF / 67 Andrea Obzerova – 123RF / 73 ermess – Shutterstock / 79 Анна Павлова – 123RF / 85 BlueOrange Studio – 123RF / 95 Ilker Canikligil – 123RF / 101 Serghei Starus – 123RF / 107 givaga – 123RF / 113 zxvisual – iStockphoto / 117 virtua73 – iStockphoto / 123 Andriy Popov – 123RF / 127 egal – iStockphoto / 133 Victor Zastolskiy – 123RF / 139 Alexey Anashkin – 123RF / 145 Baloncici – 123RF / 151 Christopher Boswell – Shutterstock / 157 Preve Beatrice – 123RF / 163 Elnur Amikishiyev – 123RF / 169 sakphuket – 123RF

MATHETUTOR
5. Klasse AHS

Autorenteam: Thomas Benes, Bojan Radenković
Redaktion: Richard Mesarić
Illustrationen: Georg Flor, Wien
Umschlaggestaltung: CMS – Cross Media Solutions GmbH, Würzburg
Innenlayout: Nathanaël Gourdin & Katy Müller GbR, Leipzig
Satz: CMS – Cross Media Solutions GmbH, Würzburg
Druck: Athesia Druck, Innsbruck

S8869
ISBN 978-3-99069-167-0
1. Auflage: A1[1] 2019

mathewerkstatt

Thomas Benes, Bojan Radenković

MATHETUTOR

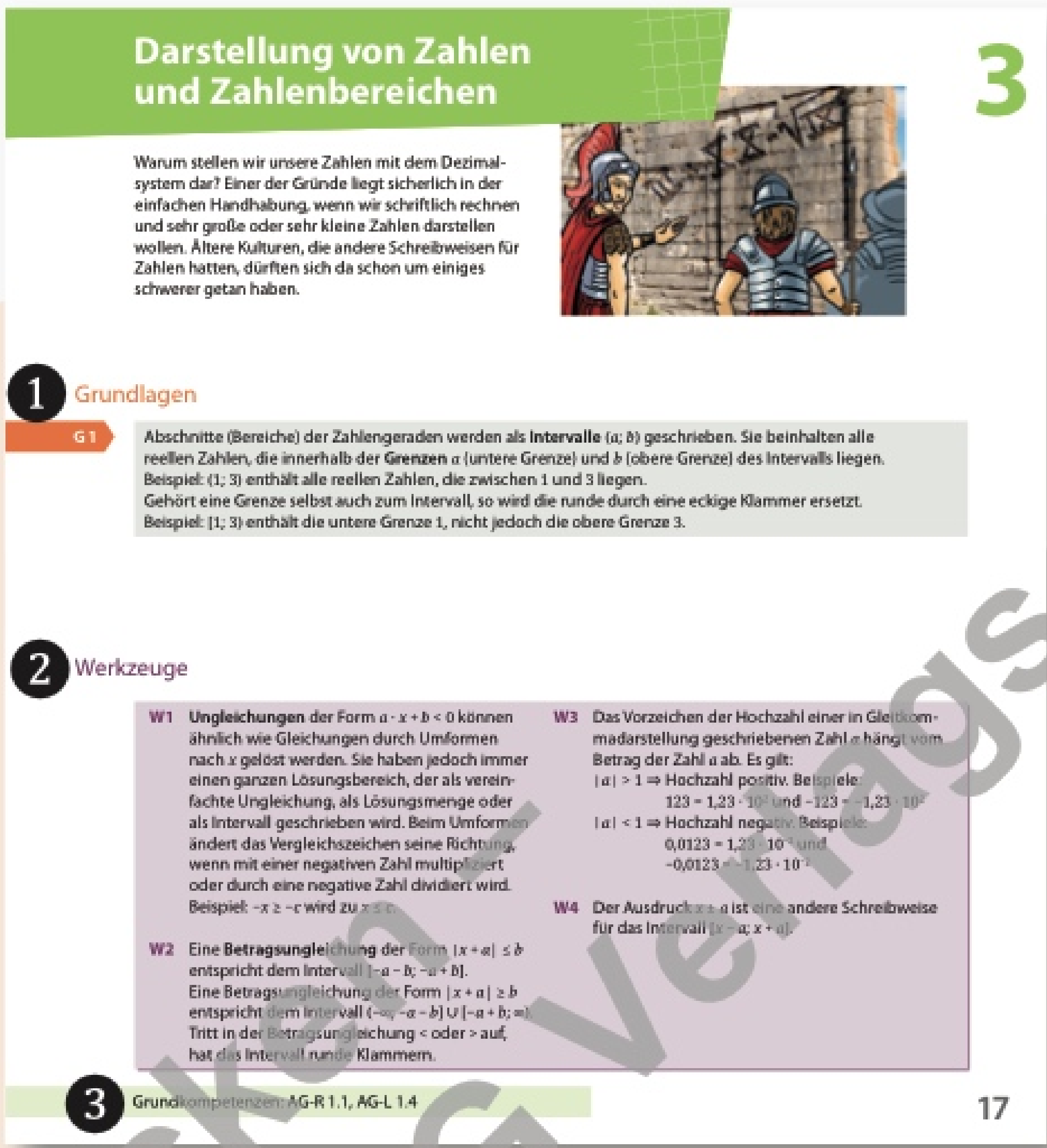
Grundkompetenztraining mit System

5. Klasse AHS

HELBLING

So begleitet dich dein MatheTutor

Ein **Tutor** begleitet durch den Lernprozess und hilft, wenn es schwierig wird.
Dieses Buch ist **dein Tutor** auf dem Weg durch die 5. Klasse und Richtung Mathematik-Matura.


3 Darstellung von Zahlen und Zahlenbereichen

Warum stellen wir unsere Zahlen mit dem Dezimalsystem dar? Einer der Gründe liegt sicherlich in der einfachen Handhabung, wenn wir schriftlich rechnen und sehr große oder sehr kleine Zahlen darstellen wollen. Ältere Kulturen, die andere Schreibweisen für Zahlen hatten, dürften sich da schon um einiges schwerer getan haben.

❶ Grundlagen

G 1 Abschnitte (Bereiche) der Zahlengeraden werden als **Intervalle** $(a; b)$ geschrieben. Sie beinhalten alle reellen Zahlen, die innerhalb der **Grenzen** a (untere Grenze) und b (obere Grenze) des Intervalls liegen.
Beispiel: $(1; 3)$ enthält alle reellen Zahlen, die zwischen 1 und 3 liegen.
Gehört eine Grenze selbst auch zum Intervall, so wird die runde durch eine eckige Klammer ersetzt.
Beispiel: $[1; 3)$ enthält die untere Grenze 1, nicht jedoch die obere Grenze 3.

❷ Werkzeuge

W1 **Ungleichungen** der Form $a \cdot x + b < 0$ können ähnlich wie Gleichungen durch Umformen nach x gelöst werden. Sie haben jedoch immer einen ganzen Lösungsbereich, der als vereinfachte Ungleichung, als Lösungsmenge oder als Intervall geschrieben wird. Beim Umformen ändert das Vergleichszeichen seine Richtung, wenn mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl dividiert wird.
Beispiel: $-x \geq -c$ wird zu $x \leq c$.

W2 Eine **Betragsungleichung** der Form $|x + a| \leq b$ entspricht dem Intervall $[-a - b; -a + b]$.
Eine Betragsungleichung der Form $|x + a| \geq b$ entspricht dem Intervall $(-\infty; -a - b] \cup [-a + b; \infty)$.
Tritt in der Betragsungleichung < oder > auf, hat das Intervall runde Klammern.

W3 Das Vorzeichen der Hochzahl einer in Gleitkommadarstellung geschriebenen Zahl a hängt vom Betrag der Zahl a ab. Es gilt:
$|a| > 1 \Rightarrow$ Hochzahl positiv. Beispiele: $123 = 1{,}23 \cdot 10^2$ und $-123 = -1{,}23 \cdot 10^2$
$|a| < 1 \Rightarrow$ Hochzahl negativ. Beispiele: $0{,}0123 = 1{,}23 \cdot 10^{-2}$ und $-0{,}0123 = -1{,}23 \cdot 10^{-2}$

W4 Der Ausdruck $x \pm a$ ist eine andere Schreibweise für das Intervall $[x - a; x + a]$.

❸ Grundkompetenzen: AG-R 1.1, AG-L 1.4

17

1 Informiere dich

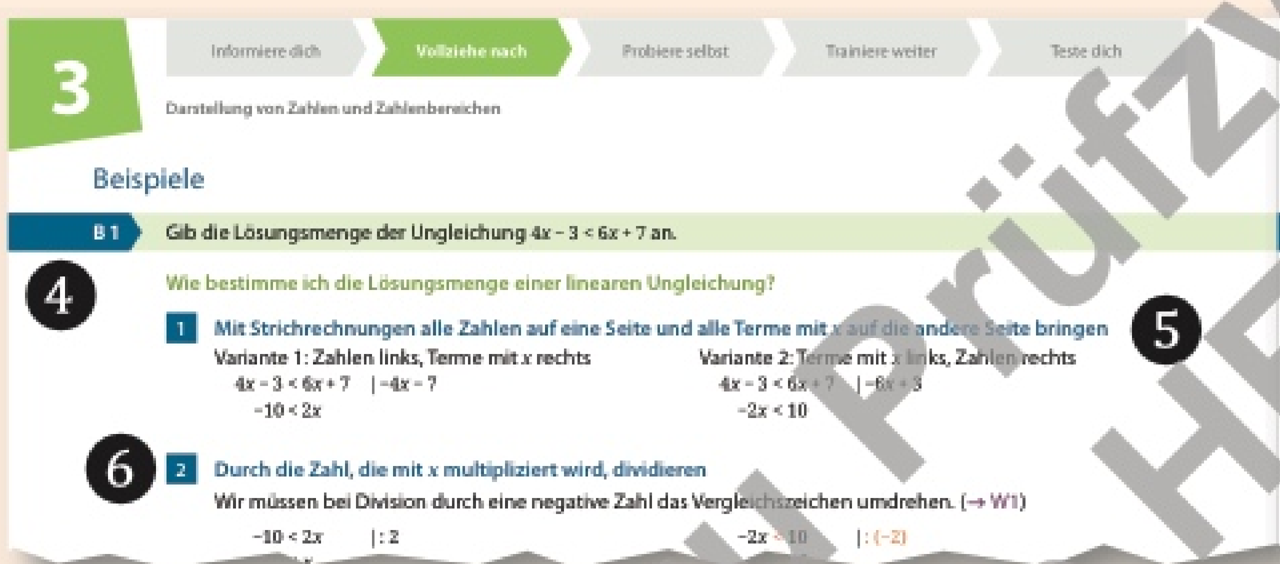
Ein **kurzer Text** stimmt dich auf das Kapitel ein.

Die **Grundlagen** ❶ benötigst du im ganzen Kapitel. Lerne oder wiederhole sie, bevor du loslegst.

Praktische **Werkzeuge** ❷ stehen dir für einzelne Aufgaben oder Lösungsschritte zur Verfügung. Dein MatheTutor weist dich darauf hin, wenn es sinnvoll ist, sie einzusetzen.

Du erfährst hier auch, welche **Grundkompetenzen** ❸ du in diesem Kapitel trainierst.

2 Vollziehe nach


3 | Informiere dich | Vollziehe nach | Probiere selbst | Trainiere weiter | Teste dich

Darstellung von Zahlen und Zahlenbereichen

Beispiele

B 1 Gib die Lösungsmenge der Ungleichung $4x - 3 < 6x + 7$ an.

❹ Wie bestimme ich die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung? ❺

1 Mit Strichrechnungen alle Zahlen auf eine Seite und alle Terme mit x auf die andere Seite bringen

Variante 1: Zahlen links, Terme mit x rechts
$4x - 3 < 6x + 7 \quad | -4x - 7$
$-10 < 2x$

Variante 2: Terme mit x links, Zahlen rechts
$4x - 3 < 6x + 7 \quad | -6x + 3$
$-2x < 10$

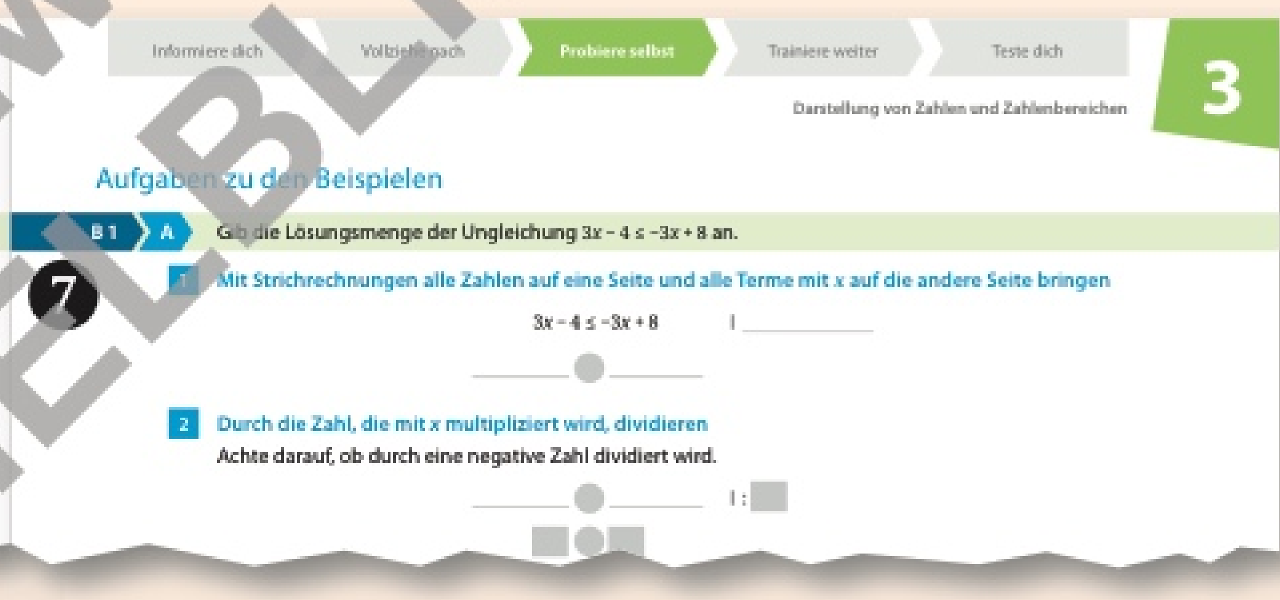
❻ 2 Durch die Zahl, die mit x multipliziert wird, dividieren

Wir müssen bei Division durch eine negative Zahl das Vergleichszeichen umdrehen. (→ W1)

$-10 < 2x \quad |:2$

$-2x < 10 \quad |:(-2)$

3 Probiere selbst


Informiere dich | Vollziehe nach | Probiere selbst | Trainiere weiter | Teste dich | 3

Darstellung von Zahlen und Zahlenbereichen

Aufgaben zu den Beispielen

B 1 A Gib die Lösungsmenge der Ungleichung $3x - 4 \leq -3x + 8$ an.

❼ 1 Mit Strichrechnungen alle Zahlen auf eine Seite und alle Terme mit x auf die andere Seite bringen

$3x - 4 \leq -3x + 8 \quad |$

2 Durch die Zahl, die mit x multipliziert wird, dividieren

Achte darauf, ob durch eine negative Zahl dividiert wird.

$|:$

Musterbeispiele ❹ zeigen dir Schritt für Schritt, wie du für das Kapitel typische Aufgaben löst.

Leitfragen ❺ helfen dir zu erkennen, um welche mathematische Fragestellung es sich handelt.

Modellschritte ❻ schlüsseln die Lösung anschaulich auf und unterstützen dich dabei, den Lösungsweg vollständig nachzuvollziehen.

Die **Aufgaben zu den Beispielen** ❼ sind wie die Musterbeispiele aufgebaut und ermöglichen es dir, selbst erste Aufgaben zu lösen.

Eine weitere *Probiere selbst*-Seite findest du online.

Hinweise zum Ausfüllen

In kleinen Kästchen trägst du Zahlen oder kurze Terme ein. Achte dabei besonders darauf, keine Vorzeichen oder Klammern zu vergessen.

$4x$ -3 $0{,}25$ (-2)

In großen Kästchen trägst du Zahlen mit vielen (Nachkomma-)Stellen, längere Terme oder Brüche ein.

$-0{,}9987$ $\sqrt{a^2 + b^2}$ $\frac{4}{9}$ $-\frac{1}{x^2}$

In Kreisen trägst du Vorzeichen und Operatoren ein, d. h. die Zeichen:
+ – : · < ≥ > ≤ = ≠ ≈ ∥ ⊥

≠ ≥ +

Du kreuzt leere Kästchen an, um die zugehörige Aussage als richtige Lösung zu markieren.

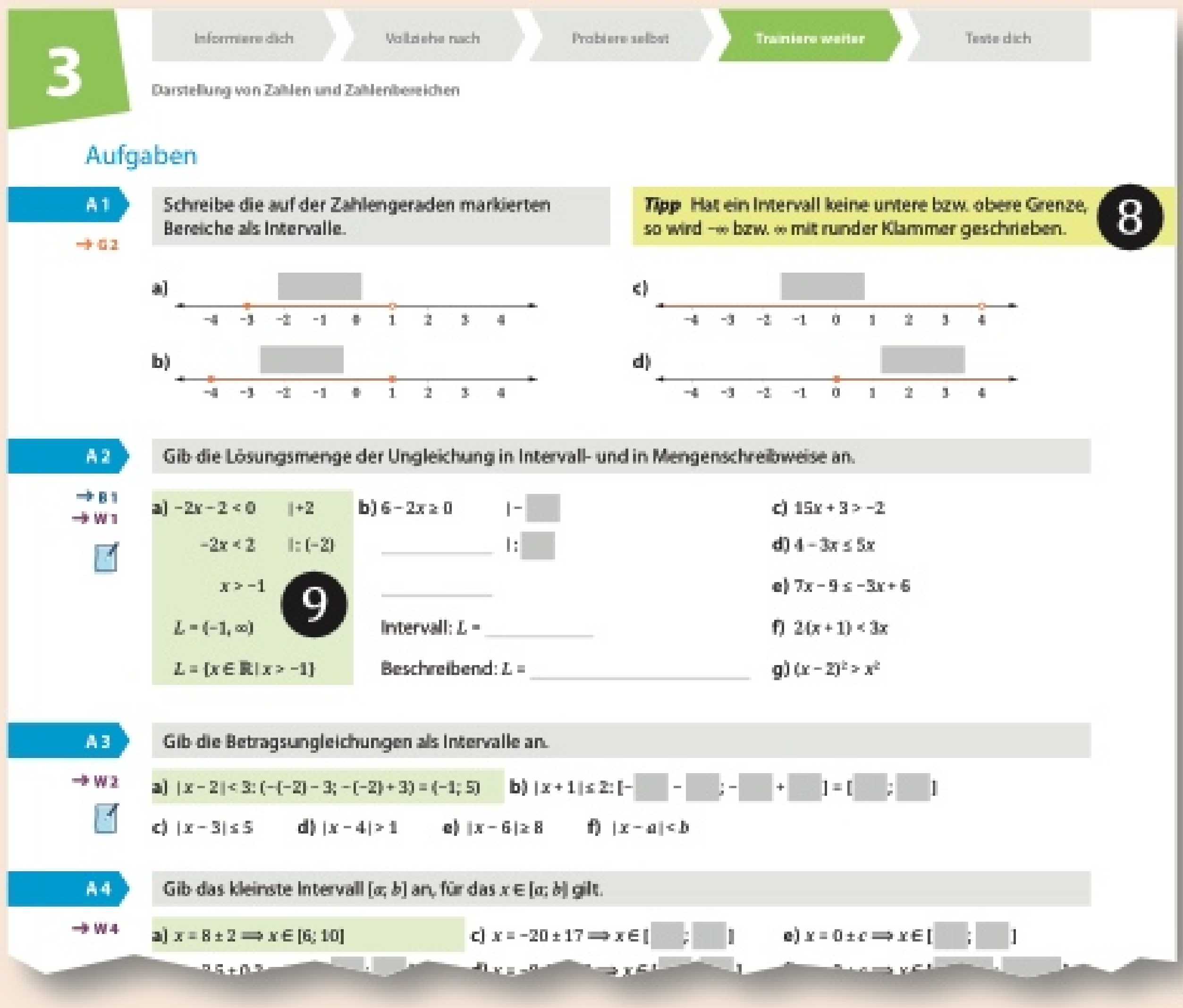
☐ ☒

Auf Schreibzeilen hast du Platz für ganze Rechenzeilen oder Text.

$3x - 17 = -4 \quad |+17$

Die Entfernung beträgt ca. 80 Meter.

4 Trainiere weiter



3

Informiere dich | Vollziehe nach | Probiere selbst | Trainiere weiter | Teste dich

Darstellung von Zahlen und Zahlenbereichen

Aufgaben

A 1 → G 2 Schreibe die auf der Zahlengeraden markierten Bereiche als Intervalle.

Tipp Hat ein Intervall keine untere bzw. obere Grenze, so wird $-\infty$ bzw. ∞ mit runder Klammer geschrieben. 8

a) b) c) d)

A 2 → B 1 → W 1 Gib die Lösungsmenge der Ungleichung in Intervall- und in Mengenschreibweise an.

a) $-2x - 2 < 0 \quad |+2$
$-2x < 2 \quad |:(-2)$
$x > -1$
$L = (-1, \infty)$
$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$ 9

b) $6 - 2x \geq 0 \quad |-$
$|:$
Intervall: L =
Beschreibend: L =

c) $15x + 3 > -2$
d) $4 - 3x \leq 5x$
e) $7x - 9 \leq -3x + 6$
f) $2(x + 1) < 3x$
g) $(x - 2)^2 > x^2$

A 3 → W 2 Gib die Betragsungleichungen als Intervalle an.

a) $|x - 2| < 3$: $(-(-2) - 3; -(-2) + 3) = (-1; 5)$ b) $|x + 1| \leq 2$: $[- \quad - \quad ; - \quad + \quad] = [\quad ; \quad]$
c) $|x - 3| \leq 5$ d) $|x - 4| > 1$ e) $|x - 6| \geq 8$ f) $|x - a| < b$

A 4 → W 4 Gib das kleinste Intervall $[a; b]$ an, für das $x \in [a; b]$ gilt.

a) $x = 8 \pm 2 \Longrightarrow x \in [6; 10]$ c) $x = -20 \pm 17 \Longrightarrow x \in [\quad ; \quad]$ e) $x = 0 \pm c \Longrightarrow x \in [\quad ; \quad]$

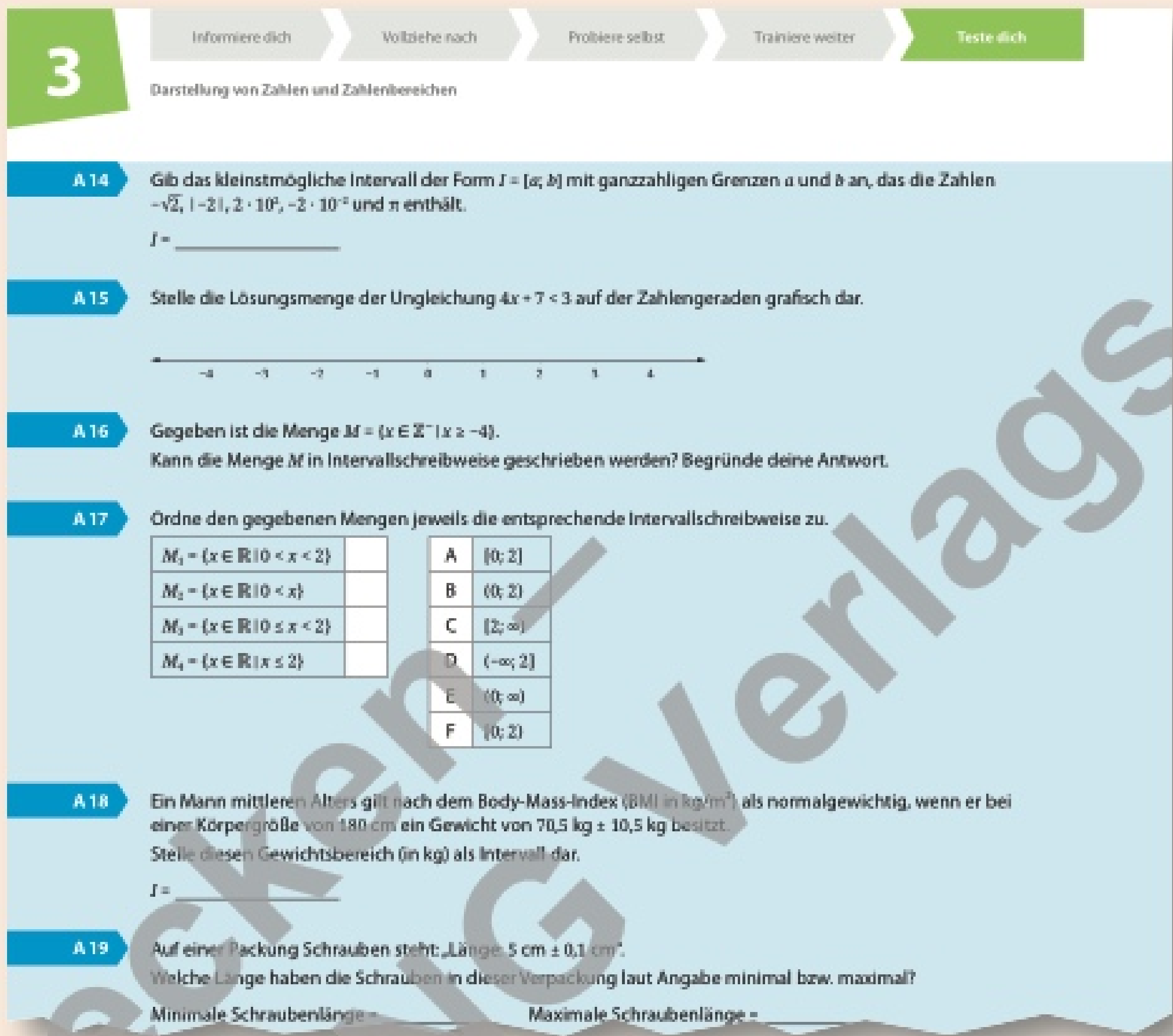
Löse die **Aufgaben** der Reihe nach, sie bauen oft aufeinander auf. Damit trainierst du die Grundkompetenzen des Kapitels.

Die **Tipps** 8 deines MatheTutors solltest du im Hinterkopf behalten.

Musterlösungen 9 sind grün hinterlegt.

Online findest du Lösungen mit Hinweisen und Erklärungen. Lies sie, auch wenn du die Aufgabe richtig gelöst hast. Sie helfen dir oft bei den nächsten Aufgaben.

5 Teste dich



3

Informiere dich | Vollziehe nach | Probiere selbst | Trainiere weiter | Teste dich

Darstellung von Zahlen und Zahlenbereichen

A 14 Gib das kleinstmögliche Intervall der Form $I = [a; b]$ mit ganzzahligen Grenzen a und b an, das die Zahlen $-\sqrt{2}$, $|-2|$, $2 \cdot 10^0$, $-2 \cdot 10^{-2}$ und π enthält.

I =

A 15 Stelle die Lösungsmenge der Ungleichung $4x + 7 < 3$ auf der Zahlengeraden grafisch dar.

A 16 Gegeben ist die Menge $M = \{x \in \mathbb{Z}^- \mid x \geq -4\}$.
Kann die Menge M in Intervallschreibweise geschrieben werden? Begründe deine Antwort.

A 17 Ordne den gegebenen Mengen jeweils die entsprechende Intervallschreibweise zu.

$M_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$	
$M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$	
$M_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$	
$M_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$	

A	$[0; 2]$
B	$(0; 2)$
C	$[2; \infty)$
D	$(-\infty; 2]$
E	$(0; \infty)$
F	$[0; 2)$

A 18 Ein Mann mittleren Alters gilt nach dem Body-Mass-Index (BMI in kg/m²) als normalgewichtig, wenn er bei einer Körpergröße von 180 cm ein Gewicht von 70,5 kg ± 10,5 kg besitzt.
Stelle diesen Gewichtsbereich (in kg) als Intervall dar.

I =

A 19 Auf einer Packung Schrauben steht: „Länge: 5 cm ± 0,1 cm".
Welche Länge haben die Schrauben in dieser Verpackung laut Angabe minimal bzw. maximal?

Minimale Schraubenlänge = Maximale Schraubenlänge =

Die letzte Seite jedes Kapitels bietet dir **typische Prüfungsaufgaben, wie bei Schularbeiten und bei der Matura.**

Für diese Seite solltest du immer ein eigenes Blatt für die Erstellung der Lösungen bereithalten.

Auf dieser Seite gibt es keine Hilfestellungen in Form von Tipps und Symbolen mehr.

In den Online-Lösungen findest du auch für diese Seite Hinweise und Erklärungen. Lies sie, auch wenn du die Aufgabe richtig gelöst hast.

Symbole

Für Zwischenschritte, Nebenrechnungen, Ergebnisse benötigst du hier ein eigenes Blatt.

Diese Aufgabe wird durch Technologieeinsatz leichter.

Diese Aufgabe erfordert Technologieeinsatz. Dieser wird in den Lösungen erläutert.

→ **B 2** Mit dieser Aufgabe wiederholst und festigst du Modellschritte aus einem Musterbeispiel.

→ **W 2** Hier verwendest du eines der Werkzeuge aus *Informiere dich*. Schlag es bei Bedarf nach.

→ **G 2** Diese Aufgabe behandelt eine der Grundlagen aus *Informiere dich*.

Online-Angebot

Wie du Zugang zum Online-Angebot erhältst, erfährst du auf der inneren Umschlagseite des MatheTutors.

Lösungen Lösungen zu allen Aufgaben der aktuellen Seite mit Hinweisen und Erklärungen, auch zum Technologieeinsatz

Weitere Aufgaben Eine weitere *Probiere selbst*-Seite zum jeweiligen Kapitel. Beschäftige dich bei Bedarf noch intensiver mit den Musterbeispielen.

Modellschritte Die Modellschritte aus allen Kapiteln in einem Dokument praktisch zusammengefasst, zum Nachschlagen, Lernen und Üben

Inhaltsverzeichnis

Hinweise zur Verwendung von Fachbegriffen

Dein MatheTutor gebraucht die gleichen mathematischen Fachbegriffe, die auch von deinem Schulbuch, deiner Lehrerin bzw. deinem Lehrer sowie in der schriftlichen Mathematik-Matura verwendet werden. Manchmal gibt es mehrere gleichwertige Ausdrücke. Da Geschmäcker bekanntlich verschieden sind, kommt es vor, dass Erklärungsbedarf besteht. Es gibt auch Begriffe, die nicht alle einsetzen, weil man die Mathematik sowohl mit diesem Begriff als auch ohne ihn erfolgreich meistern kann.

Damit dadurch keine Missverständnisse auftreten, sind auf dieser Seite Ausdrücke erläutert, die nicht in allen Schulbüchern oder bei allen Lehrerinnen und Lehrern gleich verwendet werden. Wenn du auf einen dieser Begriffe stößt, erfährst du hier, wie er in der Sprache deines MatheTutors zu verstehen ist.

abgeschlossenes Intervall (Kapitel 3, 14, 17–20): ein Intervall, dessen Grenzen zum Intervall gehören (eckige Klammern), z. B. $I = [0; 5]$

Gleichungen der Geraden (Kapitel 28, 29): Da die Parameterdarstellung $X = P + t \cdot \vec{g}$ einer Geraden die Form einer Gleichung hat, wird auch die Parameterdarstellung manchmal als eine Gleichung der Geraden bezeichnet. In anderen Fällen wird nur die allgemeine Geradengleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ als eine Gleichung der Geraden bezeichnet, wie auch im MatheTutor.

implizite Geradengleichung (Kapitel 28, 29): Bei der „expliziten“ Geradengleichung $y = k \cdot x + d$ steht y alleine auf einer Seite der Gleichung. Bei der impliziten Geradengleichung ist das nicht der Fall, z. B. ist die allgemeine Geradengleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ eine implizite Gleichung.

Monotoniebereiche (Kapitel 14, 18, 20): Die Intervalle, in denen die betrachtete Funktion unterschiedliche Monotonie hat, z. B. lauten die Monotoniebereiche von $f(x) = x^2$: streng monoton fallend in $(-\infty; 0]$ und streng monoton steigend in $[0; \infty)$.

normierte quadratische Gleichung (Kapitel 6, 7): die kleine Form einer quadratischen Gleichung, also mit $a = 1$

offenes Intervall (Kapitel 3, 11, 14, 17, 18, 20): Intervall, dessen Grenzen nicht zum Intervall gehören (runde Klammern), z. B. $I = (0; 5)$

orthogonal (Kapitel 27, 28, 29): normal (rechtwinkelig)

parallele Geraden (Kapitel 22, 29): Es gibt mehrere Möglichkeiten, das Wort parallel und das Zeichen ∥ zu verwenden, wenn man die Lagebeziehung zwischen zwei Geraden untersucht:

- „Parallele Geraden“ ($g \parallel h$) bedeutet, dass die beiden Geraden keine gemeinsamen Punkte haben. Wenn sie „übereinander“ liegen, werden sie als idente Geraden ($g = h$) bezeichnet.
- „Parallele Geraden“ ($g \parallel h$) bedeutet nur, dass die Richtungsvektoren der Geraden Vielfache voneinander sind. Wenn die Geraden nicht „übereinander“ liegen, muss man es dazusagen: Die Geraden sind parallel, aber nicht ident.

Dein MatheTutor verwendet standardmäßig die zweite Variante. Wenn die erste Variante eingesetzt wird, erfährst du es im Einstieg des Kapitels. Wichtig ist, dass dir bewusst ist, dass es hier unterschiedliche Interpretationen gibt, und du bei Prüfungen den Begriff so verwendest, wie deine Lehrerin oder dein Lehrer im Unterricht.

Skalarmultiplikation (Kapitel 24, 25, 27): Die Multiplikation einer Zahl mit einem Vektor, z. B. $3 \cdot \binom{1}{-4}$. Die Zahl (hier 3) wird oft Skalar genannt, daher der Name. Dein MatheTutor nennt diese Rechenoperation „Vervielfachung eines Vektors“ und „Multiplikation mit einer Zahl“.

Achtung: Egal, wie man diese Operation nennt, sie unterscheidet sich strikt vom „Skalarprodukt“ („skalaren Produkt“) zweier Vektoren!

Vervielfachung eines Vektors: Zahl · Vektor = Vektor
Skalarprodukt: Vektor · Vektor = Zahl

Termdarstellung einer Funktion (Kapitel 14–21): der Term auf der rechten Seite der Funktionsgleichung $f(x) = \ \dots$

Beispiel: Funktionsgleichung $f(x) = 3x^2 - 1 \Longrightarrow$ Die Termdarstellung der Funktion f lautet $3x^2 - 1$.

Venn-Diagramm (Kapitel 1): grafische Darstellung von Mengen (→ W3 auf Seite 7)

Verhältnis (direktes oder indirektes) (Kapitel 16, 20, 21): Wenn zwei Größen (in)direkt proportional zueinander sind, stehen sie in einem (in)direkten Verhältnis zueinander.

Der Winkel zwischen Geraden (Kapitel 29): Zwei Geraden schließen zwei Winkel miteinander ein. Wenn von „dem“ Winkel gesprochen wird, ist immer der kleinere gemeint.

Winkelfunktionen (Kapitel 8–13): Winkelformeln (Sinus, Cosinus, Tangens)

Tipps und Hinweise zu den Aufgaben

Zwei wichtige Tipps für das Lösen der Aufgaben

Verwende die Lösungen, um etwaige Unklarheiten zu beseitigen. Tu das aber erst, nachdem du die Aufgabe selbstständig probiert hast.

Skizzen und Nebenrechnungen sind ein wichtiger Bestandteil jeder mathematischen Überlegung. Nimm ein Blatt Papier zur Hand, wenn der Platz im Buch nicht ausreichen sollte.

Aufgabenformate im Teil 1 der Matura

Formate	Hinweise	Beispiele
Offenes Antwortformat	Formuliere eine Antwort in eigenen Worten, z. B. wenn eine Erklärung, Begründung oder Interpretation gefordert ist.	Seite 10 A13
Halboffenes Antwortformat	Ergänze eine teilweise vorgegebene Antwort, z. B. wenn einzelne Werte zu berechnen oder Abbildungen zu ergänzen sind.	Seite 10 A12
Lückentext	Ein Satz mit zwei Lücken ist vorgegeben. Für jede Lücke stehen mögliche Satzteile als Auswahl zur Verfügung. Kreuze jeweils genau einen der drei Satzteile an.	Seite 38 A16
Multiple Choice 2 aus 5	Kreuze die zwei richtigen unter fünf Antwortmöglichkeiten an.	Seite 20 A6
Multiple Choice 1 aus 6	Kreuze die eine richtige unter sechs Antwortmöglichkeiten an.	Seite 144 A17
Zuordnungsformat 4 aus 6	Schreibe in die vier Ausfüllfelder die Buchstaben der richtigen Antworten aus den sechs gegebenen Antwortmöglichkeiten.	Seite 10 A8
Konstruktionsformat	Ergänze die vorgegebene Abbildung durch ein grafisches Element, z. B. Vektoren oder Funktionsgraphen.	Seite 66 A12 Seite 94 A21

Zusätzliche Aufgabenformate in diesem Buch

Formate	Hinweise	Beispiele
Multiple Choice x aus y	Kreuze die vorgegebene Anzahl an Antwortmöglichkeiten an. z. B. 1 aus 2, 1 aus 4 oder 2 aus 5.	Seite 10 A9 Seite 14 A2
Zuordnungsformat x aus y	Schreibe in alle Ausfüllfelder die Beschriftungen der richtigen Antworten aus den gegebenen Antwortmöglichkeiten.	Seite 30 A1 Seite 110 A3
Ausfüllen	Große Teile der Antwort sind vorgegeben. Ergänze die richtigen Zahlen, Terme, Symbole oder kurzen Texte.	Seite 9 A4 Seite 14 A1
Schritt für Schritt	Fülle alle Ausfüllkästchen und Schreibzeilen in den vorgegebenen Schritten aus.	Seite 71 A6 Seite 166 A5

Mengen

Ein Pirat und ein Papagei stranden auf einer Insel. Der Pirat seufzt: „Ich bin verloren." Gleich darauf krächzt der Papagei: „Ich bin verloren!" Da murmelt der Pirat ironisch: „Offensichtlich wissen ein Pirat und ein Papagei mehr als ein Pirat." In der Sprache dieses Kapitels: Das Wissen des Mannes und das Wissen des Papageis sind Teilmengen ihrer Vereinigungsmenge.

Grundlagen

G 1 Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten, die die **Elemente der Menge** genannt werden. Eine Menge kann man unter anderem auf folgende zwei Arten darstellen:
– durch Aufzählung ihrer Elemente: Die Menge $M = \{1, 2, 3\}$ besitzt die Elemente 1, 2 und 3.
– durch Beschreibung ihrer Elemente mittels einer Bedingung: $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ besitzt die Elemente 1, 2 und 3. Dabei gibt der Ausdruck $x \in \mathbb{N}$ (d.h. x ist ein Element von $\mathbb{N}$) die Grundmenge (hier $\mathbb{N}$) an. Nur jene Elemente aus der Grundmenge, die die Bedingung nach $\mid$ erfüllen, sind in M enthalten.

G 2 Zwei Mengen heißen gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Sind A und B zwei gleiche Mengen, so schreibt man $A = B$. Beispiel: $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$

G 3 Eine Menge A heißt **Teilmenge** einer Menge B (geschrieben: $A \subseteq B$), wenn alle Elemente von A auch in B enthalten sind. Eine Teilmenge heißt **echte Teilmenge** (geschrieben: $A \subset B$), wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$.

G 4 Der **Durchschnitt** zweier Mengen A und B ist jene Menge, die genau alle diejenigen Elemente enthält, die sowohl in A als auch in B vorkommen, geschrieben: $A \cap B$. Beispiel: $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$

G 5 Die **Vereinigung** zweier Mengen A und B ist jene Menge, die alle Elemente von A und B enthält, geschrieben: $A \cup B$. Beispiel: $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

G 6 Das **Komplement** (die Differenz) zweier Mengen A und B („A ohne B") ist jene Menge, die alle Elemente von A enthält, die nicht in B enthalten sind, geschrieben: $A \setminus B$. Beispiel: $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{1\}$

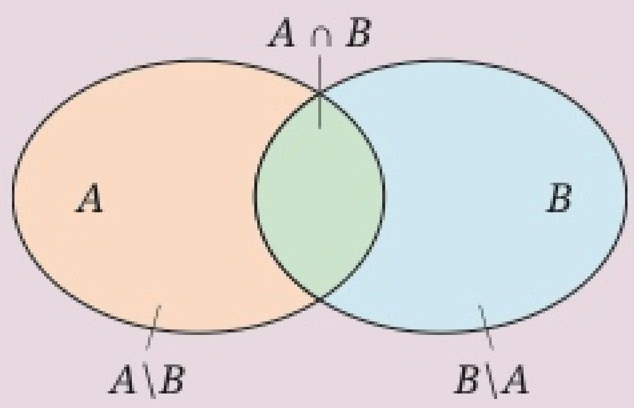
G 7 Die **leere Menge** { } (oder auch ∅) ist jene Menge, die keine Elemente enthält. Sie kommt z.B. als Schnittmenge zweier Mengen vor, die keine Elemente gemeinsam haben. Beispiel: $\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \{\}$

Werkzeuge

W1 $\mathbb{N}$ wird als Symbol für die Menge aller **natürlichen Zahlen** $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ verwendet. Diese Menge enthält unendlich viele Elemente, das wird durch die drei Punkte ausgedrückt. Zwei weitere Beispiele für unendlich große Mengen sind:
$\mathbb{N}_g = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$, die Menge der geraden natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_u = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$, die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen

W2 $a < x \leq b$ beschreibt alle Zahlen, die zwischen den **Grenzen** a und b liegen. Die Zahl a gehört wegen < nicht zum beschriebenen Zahlenbereich, b wegen ≤ schon.
Beispiel: $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x \leq 7\} = \{5, 6, 7\}$

W3 Die grafische Darstellung von Mengen ist ein nützliches Hilfsmittel, um Beziehungen zwischen Mengen leichter zu erkennen.



Beispiel

B 1 Gegeben sind zwei Mengen A und B. Stelle fest, in welcher Beziehung zueinander die Mengen A und B stehen, d. h. ob $A \subset B$, $B \subset A$ oder $A = B$.
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid -2 < x < 5\}$ und $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$

Wie bestimme ich, ob eine Menge natürlicher Zahlen eine Teilmenge einer anderen Menge ist?

1 Für jede Bedingung notieren, welche Zahlen sie beschreibt

Wir achten genau auf die Ungleichheitszeichen (→ W2) und schreiben wegen $x \in \mathbb{N}$ nur natürliche Zahlen an.
Die Bedingung $-2 < x < 5$ beschreibt für $x \in \mathbb{N}$ die Zahlen $0, 1, 2, 3, 4$.
Die Bedingung $x \leq 5$ beschreibt für $x \in \mathbb{N}$ die Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

2 Beide Mengen in der aufzählenden Schreibweise angeben

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

3 Nacheinander die Elemente beider Mengen vergleichen und daraus die richtige Relation folgern

Jedes Element von A ist auch in B enthalten, allerdings ist nicht jedes Element von B in A enthalten:
$5 \in B$, aber $5 \notin A$.
Es gilt daher $A \subset B$.

Aufgabe zum Beispiel

B 1 A Gegeben sind zwei Mengen A und B. Stelle fest, in welcher Beziehung zueinander die Mengen A und B stehen, d. h. ob $A \subset B$, $B \subset A$ oder $A = B$.
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x\}$ und $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x \leq 7\}$

1 Für jede Bedingung notieren, welche Zahlen sie beschreibt

Die Bedingung $4 < x$ beschreibt für $x \in$ ___ die Zahlen ____________, …

Die Bedingung $5 < x \leq 7$ beschreibt für $x \in$ ___ die Zahlen ____________.

2 Beide Mengen in der aufzählenden Schreibweise angeben

$A = \{$____________________$\}$

$B = \{$____________________$\}$

3 Nacheinander die Elemente beider Mengen vergleichen und daraus die richtige Relation folgern

Jedes Element von ___ ist auch in ___ enthalten, allerdings ist nicht jedes Element von ___ in ___ enthalten:
z. B. ___ $\in A$, aber ___ $\notin B$.
Es gilt daher ___ $\subset$ ___.

Aufgaben

A 1 Schreibe die gegebene Menge in aufzählender Schreibweise.

→ B 1
→ W 1–W 2

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 4\} =$ ___

c) $A = \{x \in \mathbb{N}_u \mid x < 4\} =$ ___

d) $A = \{x \in \mathbb{N}_g \mid 1 \leq x < 8\} =$ ___

e) $A = \{x \in \mathbb{N}_g \mid x \geq 3\} =$ ___

f) $A = \{x \in \mathbb{N}_u \mid -1 \leq x < 7\} =$ ___

A 2 Gegeben sind zwei Mengen A und B. Gib $A \cup B$ und $A \cap B$ an.

→ G 4–G 5
→ W 2

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{0, 2, 4, 6\}$ $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$ $A \cap B = \{2, 4\}$

b) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, B = \{-1, 0, 1\}$ $A \cup B =$ ___ $A \cap B =$ ___

c) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 5\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 7\}$ $A \cup B =$ ___ $A \cap B =$ ___

A 3 Gegeben sind zwei Mengen A und B. Gib $A \setminus B$ und $B \setminus A$ an.

Tipp Schreibe ; als Trennzeichen, wenn Kommazahlen in der Menge vorkommen.

→ G 6–G 7
→ W 2

a) $A = \{3, 5, 7, 9\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$ $A \setminus B = \{7, 9\}$ $B \setminus A = \{2, 4\}$

b) $A = \{-6{,}2; -4; 0{,}1; 3; 5{,}7\}, B = \{-6{,}2; 0{,}1; 3\}$ $A \setminus B =$ ___ $B \setminus A =$ ___

c) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 \leq x < 12\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 9\}$ $A \setminus B =$ ___ $B \setminus A =$ ___

A 4 Gegeben ist eine Menge A. Gib alle echten Teilmengen von A in aufzählender Schreibweise an.

→ G 3
→ G 7

a) $A = \{0, 1, 2\}$ $\{\,\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}$

b) $A = \{2, 3, 4\}$ { ___ }, { ___ }, { ___ }, { ___ }, { ___ , ___ }, { ___ , ___ }, { ___ , ___ }

c) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 6\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$

A 5 Gegeben ist die Menge $A = \{0, 1, 2\}$. Gib die angegebene Menge in aufzählender Schreibweise an. Entscheide anschließend, ob das Ergebnis die Menge A oder die leere Menge $\emptyset$ ist.

→ G 7

a) $A \cup A = \{0, 1, 2\} = A$

b) $A \cap A = \{$ ___ $\} =$ ___

c) $A \setminus A = \{$ ___ $\} =$ ___

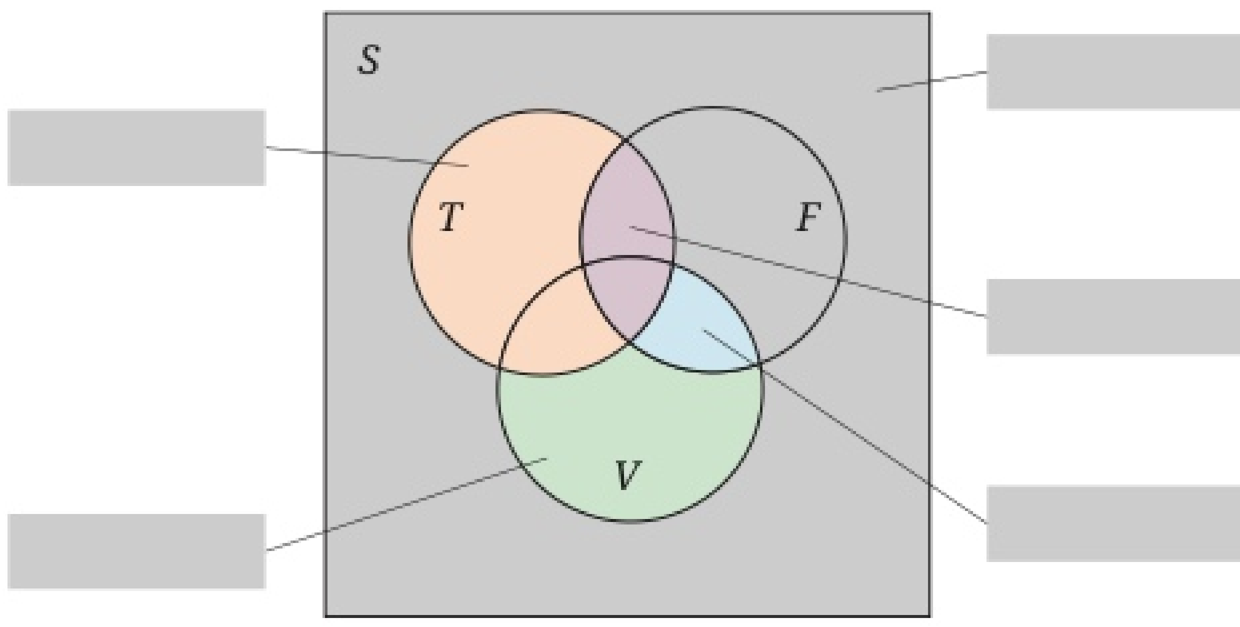
d) $A \cup \emptyset = \{$ ___ $\} =$ ___

e) $A \cap \emptyset = \{$ ___ $\} =$ ___

f) $A \setminus \emptyset = \{$ ___ $\} =$ ___

A 6 S ist die Menge aller Schülerinnen und Schüler einer Schule, die in ihrer Freizeit Sport betreiben, T derjenigen, die Tennis spielen, F derjenigen, die Fußball spielen und V derjenigen, die Volleyball spielen. Trage jede der Mengen $T \setminus F$, $T \cap F$, $V \setminus (T \cup F)$, $S \setminus (T \cup V)$ und $(F \cap V) \setminus T$ in das Kästchen ein, das zu ihrer grafischen Darstellung passt.

→ W 3



A 7 Setze die Mengen T, V, F und S so ein, dass der Ausdruck den Bereich mit den angegebenen Farben in der obigen Abbildung beschreibt.

→ W 3

a) Orange und Grün zusammen: $(T \cup V) \setminus F$

b) Blau und Grün zusammen: ___ $\setminus$ ___

c) Orange und Violett zusammen: ___

d) Violett und Blau zusammen: (___ $\cup$ ___) $\cap$ ___

e) Orange, Grün, Blau und Violett zusammen: ___ $\cup$ ___

f) Grau und Grün zusammen: ___ $\setminus$ [___ $\cup$ (___ $\cap$ ___)]

Lösungen

A 8 Gegeben sind die Mengen $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x \leq 20\}$ und $B = \{12, 14, 16, 18, 20\}$. Ordne den gegebenen Mengen jeweils die entsprechende aufzählende Schreibweise zu.

$A \cup B$	
$A \cap B$	
$A \setminus B$	
$B \setminus A$	

A	$\{11, 13, 15, 17, 19\}$
B	$\{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
C	$\{13, 15, 17, 19\}$
D	$\emptyset$
E	$\{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$
F	$\{12, 14, 16, 18, 20\}$

A 9 Gegeben sind zwei nichtleere Mengen A und B mit $A \neq B$. Kreuze die Aussagen an, die jedenfalls zutreffen.

Die Vereinigung $A \cup B$ ist größer als oder gleich groß wie jede der beiden Mengen.	☐
Der Durchschnitt $A \cap B$ ist nicht leer.	☐
Der Durchschnitt $A \cap B$ ist in jeder der beiden Mengen enthalten.	☐
Das Komplement $A \setminus B$ ist gleich der Menge A.	☐
Das Komplement $B \setminus A$ ist eine Teilmenge von A.	☐

A 10 Gib die folgende Menge in aufzählender Schreibweise an.

$\mathbb{N}_g \cup \mathbb{N}_u =$ ______________________________

A 11 Gegeben ist eine nichtleere Menge A. Kreuze alle zutreffenden Aussagen an.

$A \subseteq A$	☐
$\emptyset \subset A$	☐
$A \cup A = A$	☐
$A \cap A = \emptyset$	☐
$A \setminus A = \emptyset$	☐

A 12 Finde Zahlen a und b so, dass $\{a, 4, 6, 8\} \setminus \{3, 4, b\} = \{2, 8\}$ gilt.

$a =$ ______

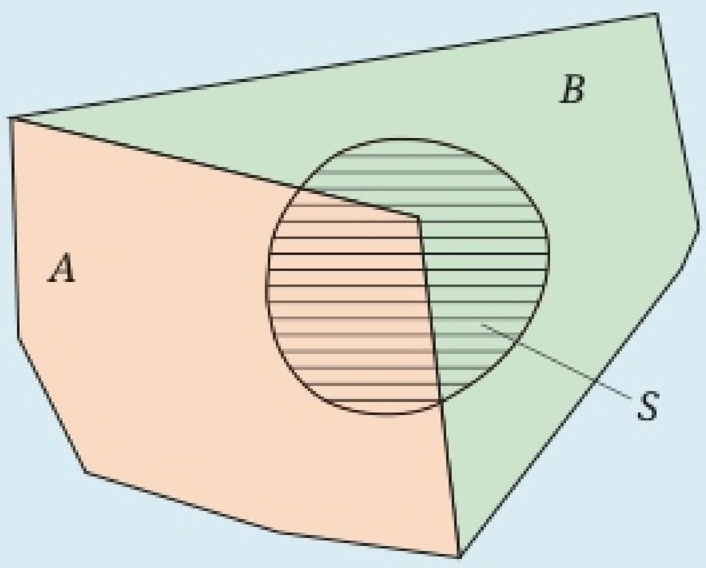
$b =$ ______

A 13 In der Abbildung sind die Mengen A und B der Einwohner zweier Staaten dargestellt, sowie die Menge S der Einwohner einer grenzübergreifenden Region, in der eine gemeinsame Sprache gesprochen wird.

a) Begründe, warum S weder eine Teilmenge von A noch von B ist.

b) Drücke die Menge der Einwohner des ersten Staates, die nicht in der Region mit der gemeinsamen Sprache wohnen, mithilfe der Mengen A, B und/oder S aus.

c) Beschreibe die Menge $B \cap S$ in eigenen Worten.



Zahlenmengen

Der deutsche Mathematiker Leopold Kronecker hat einmal gesagt: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott erschaffen, alles andere ist Menschenwerk.“
Wenn das stimmt, dann hat die Menschheit viel erreicht, sind die ganzen Zahlen doch nur ein kleiner Teil aller Zahlen.

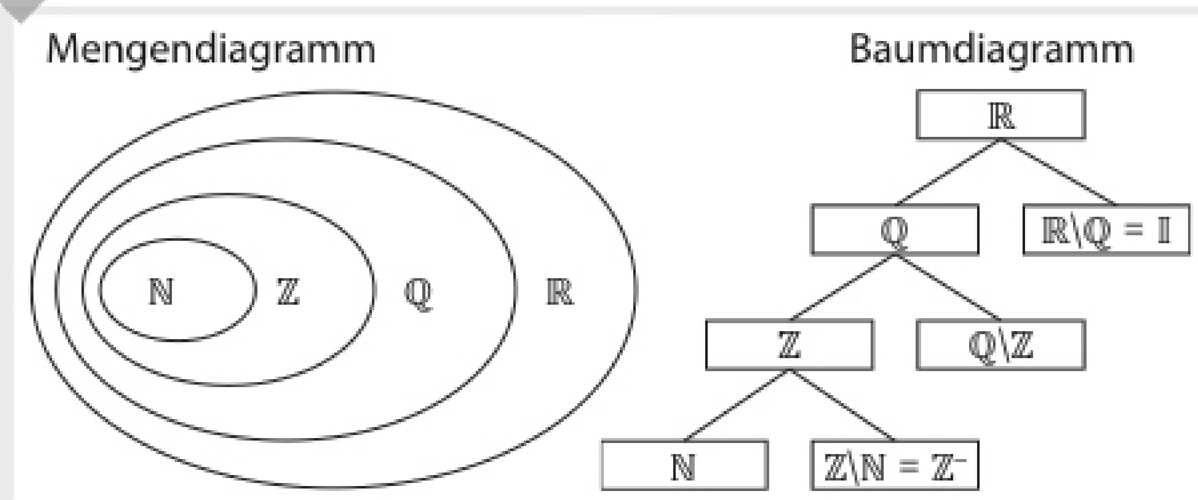
Grundlagen

G 1 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ werden durch die folgenden **Zahlenmengen** erweitert.

	Ganze Zahlen	Rationale Zahlen	Irrationale Zahlen	Reelle Zahlen
Definition	$\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$	$\mathbb{Q}$: alle Bruchzahlen = alle periodischen und endlichen Dezimalzahlen	$\mathbb{I}$: alle nicht periodischen Dezimalzahlen	$\mathbb{R}$: alle Zahlen auf der Zahlengeraden
Beispiele	5 $-\frac{8}{1} = -8$ $-\sqrt{9} = -3$	Endliche Dezimalzahlen, z. B.: 3; $1{,}97$; $-0{,}001$ Periodische Dezimalzahlen, z. B.: $4{,}\dot{4} = 4{,}444\ldots$ $-5{,}\dot{1}\dot{2} = -5{,}1212\ldots$	$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ $\sqrt{5} = 2{,}2360\ldots$ $-\sqrt{\frac{1}{3}} = -0{,}5773\ldots$ $\pi = 3{,}1415\ldots$	Alle Zahlen auf der Zahlengeraden **Keine** reelle Zahlen sind z. B.: $\infty \notin \mathbb{R}$ $\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$ $\sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$

G 2 Für diese Zahlenmengen gelten die folgenden Zusammenhänge, die sich grafisch in einem Mengendiagramm und in einem Baumdiagramm darstellen lassen:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$
$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$



G 3 Spezielle Schreibweisen bei Zahlenmengen:

die positiven bzw. negativen Zahlen einer Menge
Beispiele: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -2, -1\}$

eine Menge ohne die Null bzw. mit der Null
Beispiele: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}_0^+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Werkzeuge

W1 Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ kann auch als die Menge aller Bruchzahlen $\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$ charakterisiert werden, d. h. jede rationale Zahl kann als Bruch zweier ganzer Zahlen geschrieben werden, wobei der Nenner nicht 0 sein darf.

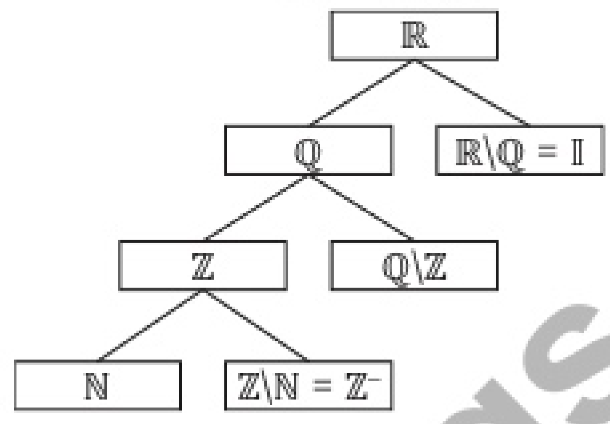
W2 Für $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{I}$ gilt: Zwischen je zwei Zahlen liegen unendlich viele Zahlen aller drei Mengen.

Beispiele

B 1 In welchen Zahlenmengen ist die Zahl $-\sqrt{121}$ enthalten?

Wie bestimme ich, in welchen Zahlenmengen eine gegebene Zahl enthalten ist?

Baumdiagramm



1 Den Zusammenhang zwischen den Zahlenmengen $\mathbb{R}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ in einem Baumdiagramm darstellen

Das Baumdiagramm dient uns als Orientierung für die Schritte 2–4 (→ G2).

2 Feststellen, ob die gegebene Zahl in $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{I}$ enthalten ist

Es ist $-\sqrt{121} = -11$, die gegebene Zahl ist eine endliche Dezimalzahl und daher in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ enthalten (→ G1).

Wäre die gegebene Zahl in $\mathbb{I}$ enthalten, müssten wir die Schritte 3 und 4 nicht mehr ausführen. Eine irrationale Zahl kann weder natürlich noch ganz sein.

3 Feststellen, ob die gegebene Zahl in $\mathbb{Z}$ enthalten ist

Die Zahl hat kein Komma und liegt daher in $\mathbb{Z}$.

Wäre die gegebene Zahl nicht in $\mathbb{Z}$ enthalten, müssten wir Schritt 4 nicht mehr ausführen. Eine Zahl, die keine ganze Zahl ist, kann nicht natürlich sein.

4 Feststellen, ob die gegebene Zahl in $\mathbb{N}$ enthalten ist

Die Zahl ist negativ und daher nicht in der Menge $\mathbb{N}$ enthalten.

Antwort: Die Zahl $-\sqrt{121}$ ist in den Zahlenmengen $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$, aber nicht in $\mathbb{I}$ und $\mathbb{N}$ enthalten.

B 2 Gegeben ist die Menge $M = \left\{x \in \mathbb{Q}^+ \,\middle|\, \frac{1}{3} < x \le \frac{1}{2}\right\}$.
Bestimme die Anzahl aller Elemente sowie die kleinste Zahl (Minimum) und die größte Zahl (Maximum) in M.

Wie bestimme ich Minimum, Maximum und die Anzahl der Elemente einer Zahlenmenge?

1 Die Menge als Teilmenge einer bestimmten Zahlenmenge erkennen und die Grenzen bestimmen

Die Zahlenmenge, deren Teilmenge M ist, erkennen wir anhand der Angabe $x \in \ldots$
M ist eine Teilmenge von: $\mathbb{Q}^+$

Untere Grenze: $\frac{1}{3}$

Obere Grenze: $\frac{1}{2}$

2 Anzahl der Elemente sowie Minimum und Maximum bestimmen

Anzahl der Elemente: unendlich viele (Zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ liegen laut → W2 unendlich viele rationale Zahlen.)

Minimum von M: gibt es nicht (Die untere Grenze ist wegen < nicht in M enthalten.)

Maximum von M: $\frac{1}{2}$ (Die obere Grenze ist wegen ≤ in M enthalten.)

Aufgaben zu den Beispielen

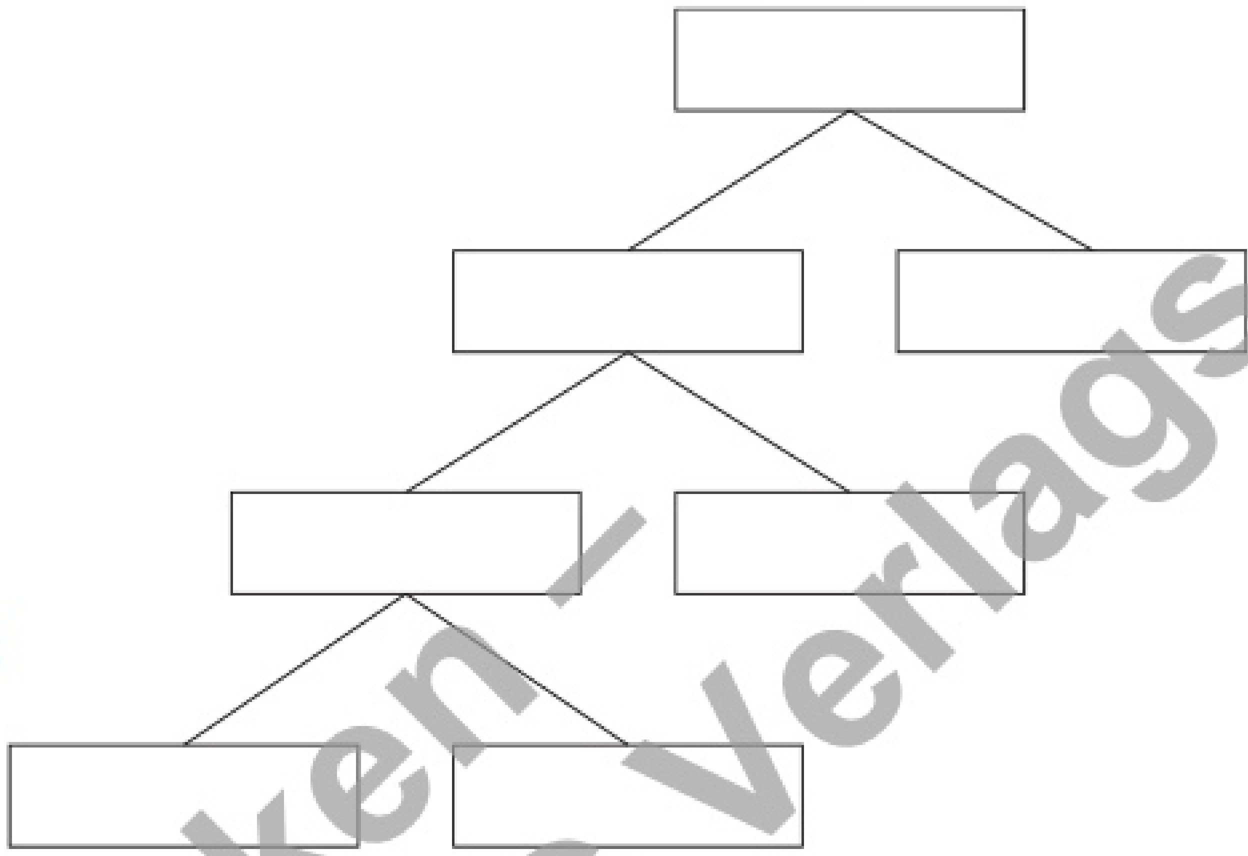
B 1 **A** In welchen Zahlenmengen ist die Zahl $-1{,}2 \cdot 10^2$ enthalten?

T

1 Den Zusammenhang zwischen den Zahlenmengen $\mathbb{R}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ in einem Baumdiagramm darstellen

Trage im abgebildeten Baumdiagramm die Zahlenmengen $\mathbb{R}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ richtig ein.

Baumdiagramm



2 Feststellen, ob die gegebene Zahl in $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{I}$ enthalten ist

Tippe die Zahl zuerst in den Taschenrechner ein:
$-1{,}2 \cdot 10^2 =$ ____

Die gegebene Zahl ist eine ________
(endliche/nicht endliche: → G1) Dezimalzahl und daher in der Zahlenmenge ____ enthalten.

3 Feststellen, ob die gegebene Zahl in $\mathbb{Z}$ enthalten ist

Die Zahl hat ________ Komma und liegt daher in ____.

4 Feststellen, ob die gegebene Zahl in $\mathbb{N}$ enthalten ist

Die Zahl ist ________ und daher ________ in der Menge ____ enthalten.

Antwort: Die Zahl $-1{,}2 \cdot 10^2$ ist in den Zahlenmengen ________, aber nicht in ________ enthalten.

B 2 **A** Gegeben ist die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} \mid \pi \leq x < 2\pi\}$.
Bestimme die Anzahl aller Elemente sowie die kleinste (Minimum) und die größte Zahl (Maximum) in M.

1 Die Menge als Teilmenge einer bestimmten Zahlenmenge erkennen und die Grenzen bestimmen

M ist eine Teilmenge von: ____

Untere Grenze: ____

Obere Grenze: ____

2 Anzahl der Elemente sowie Minimum und Maximum bestimmen

Anzahl der Elemente in M: ________ (→ W2)

Minimum von M: ________

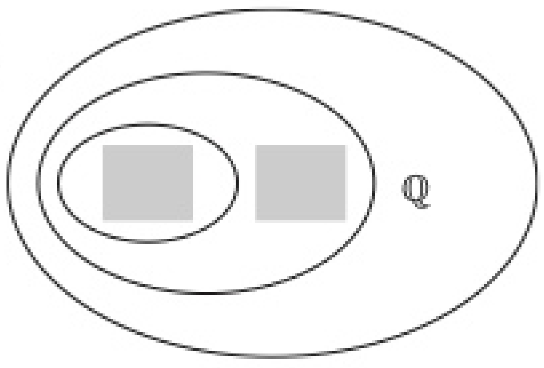
Maximum von M: ________

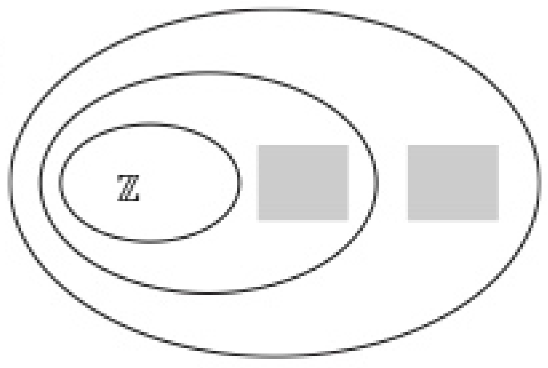
Lösungen   Weitere Aufgaben

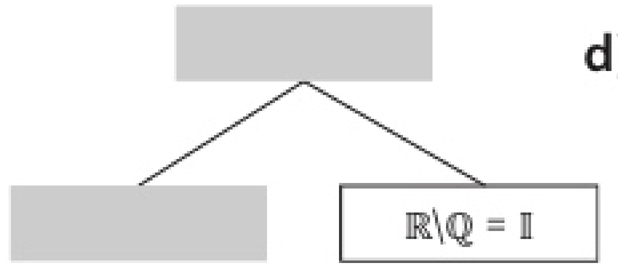
Aufgaben

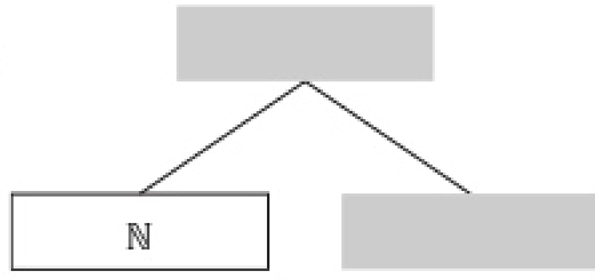
A 1 Beschrifte die Diagramme mit den passenden Zahlenmengen.

→ G2

a) 

b) 

c) 

d) 

A 2 Kreuze an, ob der Ausdruck eine reelle Zahl darstellt, d. h. ein Element der Menge ℝ ist, oder nicht.

→ G1

a) $\frac{1}{0}$ ☐ $\in \mathbb{R}$ ☒ $\notin \mathbb{R}$ **c)** $\sqrt{0}$ ☐ $\in \mathbb{R}$ ☐ $\notin \mathbb{R}$ **e)** $\sqrt{-1}$ ☐ $\in \mathbb{R}$ ☐ $\notin \mathbb{R}$

b) $\frac{0}{1}$ ☐ $\in \mathbb{R}$ ☐ $\notin \mathbb{R}$ **d)** $\frac{\infty}{2}$ ☐ $\in \mathbb{R}$ ☐ $\notin \mathbb{R}$ **f)** $\frac{1}{\pi}$ ☐ $\in \mathbb{R}$ ☐ $\notin \mathbb{R}$

A 3 Kreuze an, ob die gegebene Zahl in ℚ oder 𝕀 enthalten ist.

→ W1

a) $\frac{1}{3}$ ☒ $\in \mathbb{Q}$ ☐ $\in \mathbb{I}$ **c)** $\frac{2}{5}$ ☐ $\in \mathbb{Q}$ ☐ $\in \mathbb{I}$ **e)** $\frac{8}{2}$ ☐ $\in \mathbb{Q}$ ☐ $\in \mathbb{I}$

b) $\frac{\pi}{2}$ ☐ $\in \mathbb{Q}$ ☐ $\in \mathbb{I}$ **d)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ $\in \mathbb{Q}$ ☐ $\in \mathbb{I}$ **f)** $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$ ☐ $\in \mathbb{Q}$ ☐ $\in \mathbb{I}$

A 4 Berechne die Zahl a (mit dem Taschenrechner) und kreuze an, ob sie in der Menge ℤ liegt, d. h. ohne Komma geschrieben werden kann.

→ G1

T

a) $a = \frac{16}{4} = 4$ ☒ $\in \mathbb{Z}$ **d)** $a = \frac{0}{7} =$ ______ ☐ $\in \mathbb{Z}$

b) $a = \frac{14}{4} =$ ______ ☐ $\in \mathbb{Z}$ **e)** $a = -\frac{1}{1} =$ ______ ☐ $\in \mathbb{Z}$

c) $a = \sqrt{90} =$ ______ ☐ $\in \mathbb{Z}$ **f)** $a = 1{,}5 \cdot 10^2 =$ ______ ☐ $\in \mathbb{Z}$

A 5 Kreuze alle Zahlenmengen an, in denen die gegebene bzw. beschriebene Zahl jedenfalls enthalten ist.

→ B1

	ℕ	ℤ	ℚ	𝕀	ℝ
a) $-\frac{36}{3}$	☐	☐	☐	☐	☐
b) $\sqrt{\frac{36}{3}}$	☐	☐	☐	☐	☐
c) $\frac{3}{36}$	☐	☐	☐	☐	☐
d) $\left(-\frac{36}{3}\right)^2$	☐	☐	☐	☐	☐

	ℕ	ℤ	ℚ	𝕀	ℝ
e) Die Zahl lässt sich als Bruch ganzer Zahlen darstellen.	☐	☐	☐	☐	☐
f) Die Zahl hat einen Nachfolger, aber keinen Vorgänger.	☐	☐	☐	☐	☐
g) Die Zahl hat nur Nullen hinter dem Komma.	☐	☐	☐	☐	☐
h) Die Zahl liegt auf der Zahlengeraden.	☐	☐	☐	☐	☐

A 6 Gib an, wie viele Zahlen in der gegebenen Zahlenmenge M enthalten sind.

→ W2

a) $M = \{x \in \mathbb{I} \mid 0 < x \leq 1\}$

______

b) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\,000\}$

______

c) $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0{,}001 \leq x \leq 0{,}01\}$

______

d) $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid -10 < x < 10\}$

______

A 7 → B2 → G3

Gib das Minimum und das Maximum der gegebenen Zahlenmenge an, falls sie existieren.

	Minimum	Maximum		Minimum	Maximum
a) $\mathbb{Q}^-$			**e)** $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{R}_0^+$		
b) $\mathbb{N}^*$			**f)** $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Z}$		
c) $\mathbb{R}_0^+$			**g)** $\mathbb{N} \cup \mathbb{I}^+$		
d) $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}^+$			**h)** $\mathbb{Q}^- \cap \mathbb{I}^-$		

A 8 → G3

Gib drei Zahlen an, die in der gegebenen Zahlenmenge enthalten sind.

a) $\mathbb{N}^*$: z. B. ____________ **c)** $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}$: z. B. ____________

b) $\mathbb{Q}_0^+$: z. B. ____________ **d)** $\mathbb{Q}^- \cap \mathbb{Z}$: z. B. ____________

A 9 → G2

Kreuze alle korrekten Aussagen an.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$ ☐ $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ ☐ $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ☐

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{R} \subset (\mathbb{R} \cup \mathbb{N})$ ☐ $\mathbb{I} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ ☐

A 10 → W1

Kreuze an, ob sich die gegebene bzw. beschriebene Zahl als Bruch ganzer Zahlen darstellen lässt oder nicht.

	Bruch ganzer Zahlen	kein Bruch ganzer Zahlen		Bruch ganzer Zahlen	kein Bruch ganzer Zahlen
a) -71	☐	☐	**d)** jede rationale Zahl	☐	☐
b) 0,05	☐	☐	**e)** jede irrationale Zahl	☐	☐
c) $\frac{\pi}{4}$	☐	☐	**f)** jede ganze Zahl	☐	☐

A 11

Finde Zahlen, die die beschriebene Rechnung erfüllen.

a) Die Differenz zweier natürlicher Zahlen ergibt eine negative ganze Zahl: ☐ − ☐ = ☐

b) Die Multiplikation zweier irrationaler Zahlen ergibt eine natürliche Zahl: ☐ · ☐ = ☐

c) Das Produkt zweier Zahlen aus $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ergibt eine Zahl aus $\mathbb{Z}$: ☐ · ☐ = ☐

d) Das Produkt einer rationalen und einer irrationalen Zahl ergibt eine natürliche Zahl: ☐ · ☐ = ☐

A 12

Gegeben ist eine natürliche Zahl $a \neq 0$ sowie eine rationale Zahl $b \neq 0$. Kreuze alle Zahlenmengen an, in denen der Ausdruck jedenfalls enthalten ist.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$		$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
a) $-a$	☐	☐	☐	☐	☐	**e)** $-b$	☐	☐	☐	☐	☐
b) $\frac{1}{a}$	☐	☐	☐	☐	☐	**f)** $\frac{1}{b}$	☐	☐	☐	☐	☐
c) a^2	☐	☐	☐	☐	☐	**g)** b^2	☐	☐	☐	☐	☐
d) $\sqrt{a}$	☐	☐	☐	☐	☐	**h)** $\sqrt{b}$	☐	☐	☐	☐	☐

Lösungen

A 13 Kreuze die zutreffenden Aussagen an.

$-0{,}5 \in \mathbb{Z}$	$\frac{3}{1} \in \mathbb{N}$	$\frac{\pi}{2} \in \mathbb{Q}$	$\sqrt{6} \in \mathbb{I}$	$\sqrt{-2} \in \mathbb{R}$
☐	☐	☐	☐	☐

A 14 Kreuze die zutreffenden Aussagen an.

Jede ganze Zahl ist eine natürliche Zahl.	☐
Es gibt irrationale Zahlen, die auch rational sind.	☐
Eine reelle Zahl ist immer auch rational.	☐
Eine ganze Zahl kann nicht irrational sein.	☐
Es gibt mindestens eine Zahl, die sowohl natürlich, ganz, rational und auch reell ist.	☐

A 15 Kreuze die zutreffenden Aussagen an.

Jede Bruchzahl kann als Dezimalzahl dargestellt werden.	☐
Die Menge der rationalen Zahlen setzt sich aus allen Zahlen der Form $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$ zusammen.	☐
Jede natürliche Zahl kann als Bruchzahl geschrieben werden.	☐
Die Wurzel aus einer positiven ganzen Zahl kann immer als Bruchzahl geschrieben werden.	☐
Jede reelle Zahl kann als Bruchzahl geschrieben werden.	☐

A 16 Die Zahl z ist Element der Zahlenmenge $\mathbb{Q}_0^-$. Es gibt keine negative reelle Zahl, die größer als z ist.
Wie lautet die Zahl z?

z = ________

A 17 Ordne jeder Verknüpfung zweier Zahlenmengen jeweils die Zahlenmenge zu, die ihr entspricht.

$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z}$	
$\mathbb{I} \cap \mathbb{R}^-$	
$\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^+$	
$\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+$	

A	$\mathbb{I}^+$
B	$\mathbb{Z}^+$
C	$\mathbb{Q}$
D	$\mathbb{I}^-$
E	$\mathbb{N}$
F	$\mathbb{I}$

A 18 Gegeben ist die Menge $M = \mathbb{Q}_0^-$.
a) Gib drei Zahlen an, die in M liegen.
b) Wie lautet das größte Element der Menge M? Wie viele Elemente enthält die Menge M?
c) Kreuze die Zahlenmengen an, in denen M vollständig enthalten ist.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
$M \subset$	☐	☐	☐	☐	☐

Lösungen

Darstellung von Zahlen und Zahlenbereichen

Warum stellen wir unsere Zahlen mit dem Dezimalsystem dar? Einer der Gründe liegt sicherlich in der einfachen Handhabung, wenn wir schriftlich rechnen und sehr große oder sehr kleine Zahlen darstellen wollen. Ältere Kulturen, die andere Schreibweisen für Zahlen hatten, dürften sich da schon um einiges schwerer getan haben.

Grundlagen

G 1 Abschnitte (Bereiche) der Zahlengeraden werden als **Intervalle** $(a; b)$ geschrieben. Sie beinhalten alle reellen Zahlen, die innerhalb der **Grenzen** a (untere Grenze) und b (obere Grenze) des Intervalls liegen.
Beispiel: $(1; 3)$ enthält alle reellen Zahlen, die zwischen 1 und 3 liegen.
Gehört eine Grenze selbst auch zum Intervall, so wird die runde durch eine eckige Klammer ersetzt.
Beispiel: $[1; 3)$ enthält die untere Grenze 1, nicht jedoch die obere Grenze 3.

G 2 Bei der grafischen Darstellung von Intervallen auf der Zahlengeraden werden runde Klammern durch einen Kreis und eckige Klammern durch einen ausgefüllten Kreis markiert.

G 3 Der **Betrag einer Zahl** a wird $|a|$ geschrieben und gibt den Abstand der Zahl a von 0 auf der Zahlengeraden an. Jede Zahl hat daher einen positiven Betrag. Beispiel: $|-7| = 7$

G 4 Das **Dezimalsystem** basiert auf der Zahl 10, d. h. jede Zahl wird als Summe von Zehnerpotenzen 10^k geschrieben. Beispiel: $125 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$
Andere Zahlensysteme sind z. B. das **Binärsystem** (Basis 2) oder das Hexadezimalsystem (Basis 16). Die Basis steht im Index einer Ziffernfolge in eckigen Klammern und zeigt an, welches Zahlensystem vorliegt.

G 5 Die **Gleitkommadarstellung** einer Zahl a hat die allgemeine Form $a = m \cdot 10^k$, wobei $1 \leq |m| < 10$ und $k \in \mathbb{Z}$.
Die Zahl m wird die **Mantisse** und k die Hochzahl der Gleitkommadarstellung genannt.
Beispiel: Die Zahl 300 in üblicher Dezimalschreibweise wird in Gleitkommaschreibweise zu $3 \cdot 10^2$.

Werkzeuge

W1 **Ungleichungen** der Form $a \cdot x + b < 0$ können ähnlich wie Gleichungen durch Umformen nach x gelöst werden. Sie haben jedoch immer einen ganzen Lösungsbereich, der als vereinfachte Ungleichung, als Lösungsmenge oder als Intervall geschrieben wird. Beim Umformen ändert das Vergleichszeichen seine Richtung, wenn mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl dividiert wird.
Beispiel: $-x \geq -c$ wird zu $x \leq c$.

W2 Eine **Betragsungleichung** der Form $|x + a| \leq b$ entspricht dem Intervall $[-a - b; -a + b]$.
Eine Betragsungleichung der Form $|x + a| \geq b$ entspricht dem Intervall $(-\infty; -a - b] \cup [-a + b; \infty)$.
Tritt in der Betragsungleichung < oder > auf, hat das Intervall runde Klammern.

W3 Das Vorzeichen der Hochzahl einer in Gleitkommadarstellung geschriebenen Zahl a hängt vom Betrag der Zahl a ab. Es gilt:
$|a| > 1 \Rightarrow$ Hochzahl positiv. Beispiele:
$123 = 1{,}23 \cdot 10^2$ und $-123 = -1{,}23 \cdot 10^2$
$|a| < 1 \Rightarrow$ Hochzahl negativ. Beispiele:
$0{,}0123 = 1{,}23 \cdot 10^{-2}$ und
$-0{,}0123 = -1{,}23 \cdot 10^{-2}$

W4 Der Ausdruck $x \pm a$ ist eine andere Schreibweise für das Intervall $[x - a; x + a]$.

Beispiele

B 1 Gib die Lösungsmenge der Ungleichung $4x - 3 < 6x + 7$ an.

Wie bestimme ich die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung?

1 Mit Strichrechnungen alle Zahlen auf eine Seite und alle Terme mit x auf die andere Seite bringen

Variante 1: Zahlen links, Terme mit x rechts

$4x - 3 < 6x + 7 \quad | -4x - 7$

$-10 < 2x$

Variante 2: Terme mit x links, Zahlen rechts

$4x - 3 < 6x + 7 \quad | -6x + 3$

$-2x < 10$

2 Durch die Zahl, die mit x multipliziert wird, dividieren

Wir müssen bei Division durch eine negative Zahl das Vergleichszeichen umdrehen. (→ W1)

$-10 < 2x \quad | : 2$

$-5 < x$

$-2x < 10 \quad | : (-2)$

$x > -5$

3 Die erhaltene vereinfachte Ungleichung als Bedingung in die Lösungsmenge schreiben

$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$

B 2 Schreibe die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \le 4\}$ als Intervall an und stelle sie auf einer Zahlengeraden dar.

Wie schreibe ich eine Zahlenmenge als Intervall und stelle sie grafisch dar?

1 Die Grenzen der Menge bestimmen

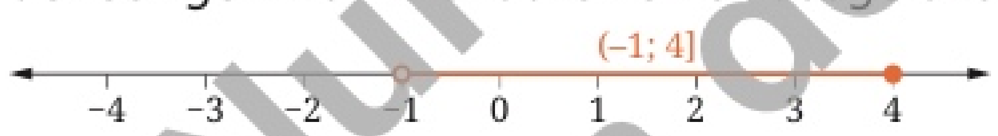
Die untere Grenze ist -1 und die obere Grenze ist 4.

2 Die richtige Klammer für jede Grenze bestimmen und das Intervall anschreiben

Vor die untere Grenze setzen wir wegen < eine runde Klammer, hinter die obere Grenze setzen wir wegen ≤ eine eckige Klammer: $M = (-1; 4]$

3 Die Grenzen und den Bereich dazwischen auf der Zahlengeraden markieren

Wir markieren die untere Grenze wegen der runden Klammer durch einen Kreis und die obere Grenze wegen der eckigen Klammer durch einen ausgefüllten Kreis. (→ G2)



B 3 Gegeben sind die Zahlen **a)** $36\,705$ und **b)** $0{,}000\,0938$. Schreibe diese Zahlen in Gleitkommadarstellung.

Wie wandle ich eine Zahl in Gleitkommadarstellung um?

1 Das Komma hinter die erste Ziffer von links setzen, die nicht null ist, und diese Zahl als Mantisse notieren

a) Mantisse = $3{,}6705$

b) Mantisse = $9{,}38$

2 Abzählen, um wie viele Stellen das Komma in Schritt 1 verschoben wurde, und daraus die Hochzahl der Gleitkommaschreibweise bestimmen

Um das richtige Vorzeichen der Hochzahl festzustellen, verwenden wir → W3.

a) Von $36\,705$ auf $3{,}6705$ wurde das Komma um vier Stellen verschoben.
$|36\,705| > 1$, daher muss die Hochzahl positiv sein. $\Longrightarrow$ Hochzahl = 4

b) Von $0{,}000\,0938$ auf $9{,}38$ wurde das Komma um fünf Stellen verschoben.
$|0{,}000\,0938| < 1$, daher muss die Hochzahl negativ sein. $\Longrightarrow$ Hochzahl = -5

3 Mantisse und Hochzahl zur Gleitkommadarstellung der Zahl verbinden

a) $36\,705 = 3{,}6705 \cdot 10^4$

b) $0{,}000\,0938 = 9{,}38 \cdot 10^{-5}$

Aufgaben zu den Beispielen

B 1 **A** Gib die Lösungsmenge der Ungleichung $3x - 4 \leq -3x + 8$ an.

1 **Mit Strichrechnungen alle Zahlen auf eine Seite und alle Terme mit x auf die andere Seite bringen**

$3x - 4 \leq -3x + 8 \quad | \ \_\_\_\_\_\_$

$\_\_\_\_\_\_ \bigcirc \_\_\_\_\_\_$

2 **Durch die Zahl, die mit x multipliziert wird, dividieren**

Achte darauf, ob durch eine negative Zahl dividiert wird.

$\_\_\_\_\_\_ \bigcirc \_\_\_\_\_\_ \quad | : \square$

$\square \bigcirc \square$

3 **Die erhaltene vereinfachte Ungleichung als Bedingung in die Lösungsmenge schreiben**

$L = \{x \in \square \mid \_\_\_\_\_\_ \}$

B 2 **A** Schreibe die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$ als Intervall an und stelle sie auf einer Zahlengeraden dar.

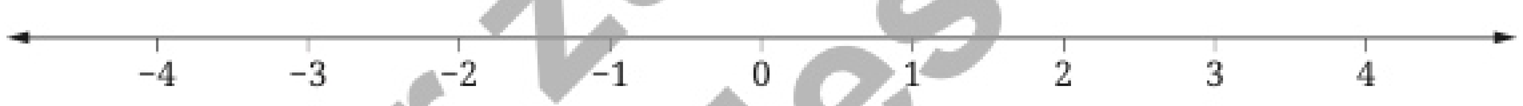
1 **Die Grenzen der Menge bestimmen**

Die untere Grenze ist ___ und die obere Grenze ist ___.

2 **Die richtige Klammer für jede Grenze bestimmen und das Intervall anschreiben**

Vor die untere Grenze setzen wir wegen ___ eine ______ Klammer, hinter die obere Grenze setzen wir wegen ___ eine ______ Klammer. Das Intervall lautet $M =$ ______ .

3 **Die Grenzen und den Bereich dazwischen auf der Zahlengeraden markieren**



B 3 **A** Gegeben sind die Zahlen **a)** 257 und **b)** $0{,}00086$. Schreibe diese Zahlen in Gleitkommadarstellung.

1 **Das Komma hinter die erste Ziffer von links setzen, die nicht Null ist, und diese Zahl als Mantisse notieren**

a) Mantisse = ___ **b)** Mantisse = ___

2 **Abzählen, um wie viele Stellen das Komma in Schritt 1 verschoben wurde, und daraus die Hochzahl der Gleitkommaschreibweise bestimmen**

a) Von 257 auf ___ wurde das Komma um ______ Stellen verschoben.

$|257| \bigcirc 1$, daher muss die Hochzahl ______ sein. $\Rightarrow$ Hochzahl = ___

b) Von $0{,}00086$ auf ___ wurde das Komma um ______ Stellen verschoben.

$|0{,}00086| \bigcirc 1$, daher muss die Hochzahl ______ sein. $\Rightarrow$ Hochzahl = ___

3 **Mantisse und Hochzahl zur Gleitkommadarstellung der Zahl verbinden**

a) $257 = \square \cdot 10^{\square}$ b) $0{,}00086 = \square \cdot 10^{\square}$

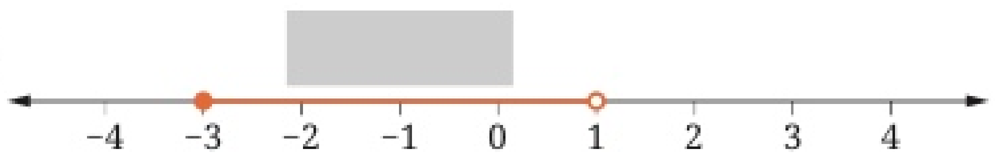
Lösungen | Weitere Aufgaben

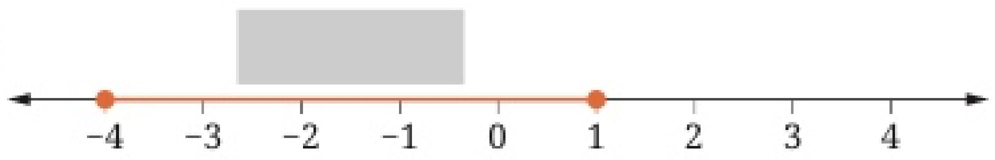
Aufgaben

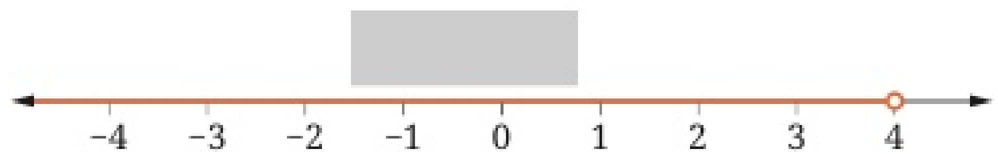
A 1 → G 2

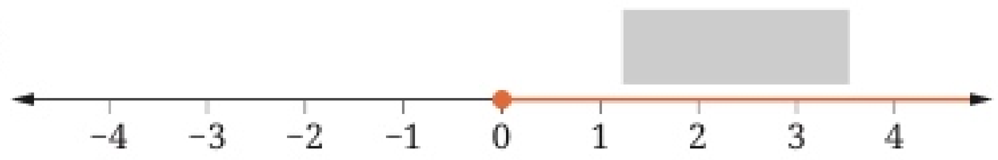
Schreibe die auf der Zahlengeraden markierten Bereiche als Intervalle.

Tipp Hat ein Intervall keine untere bzw. obere Grenze, so wird $-\infty$ bzw. ∞ mit runder Klammer geschrieben.

a) 

b) 

c) 

d) 

A 2 → B 1 → W 1

Gib die Lösungsmenge der Ungleichung in Intervall- und in Mengenschreibweise an.

a) $-2x - 2 < 0 \quad | +2$
$-2x < 2 \quad | : (-2)$
$x > -1$
$L = (-1, \infty)$
$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

b) $6 - 2x \geq 0 \quad | -$ ___
___ $\quad | :$ ___
___
Intervall: L = ___
Beschreibend: L = ___

c) $15x + 3 > -2$

d) $4 - 3x \leq 5x$

e) $7x - 9 \leq -3x + 6$

f) $2(x + 1) < 3x$

g) $(x - 2)^2 > x^2$

A 3 → W 2

Gib die Betragsungleichungen als Intervalle an.

a) $|x - 2| < 3$: $(-(-2) - 3; -(-2) + 3) = (-1; 5)$

b) $|x + 1| \leq 2$: [– ___ – ___; – ___ + ___] = [___ ; ___]

c) $|x - 3| \leq 5$ **d)** $|x - 4| > 1$ **e)** $|x - 6| \geq 8$ **f)** $|x - a| < b$

A 4 → W 4

Gib das kleinste Intervall $[a; b]$ an, für das $x \in [a; b]$ gilt.

a) $x = 8 \pm 2 \Longrightarrow x \in [6; 10]$

b) $x = 3{,}5 \pm 0{,}2 \Longrightarrow x \in$ [___ ; ___]

c) $x = -20 \pm 17 \Longrightarrow x \in$ [___ ; ___]

d) $x = -8{,}4 \pm 6{,}6 \Longrightarrow x \in$ [___ ; ___]

e) $x = 0 \pm c \Longrightarrow x \in$ [___ ; ___]

f) $x = 2 \pm c \Longrightarrow x \in$ [___ ; ___]

A 5

Schreibe den gegebenen Ausdruck als $x = a \pm b$.

a) $x \in [2; 10]$: a = Mitte des Intervalls = $\frac{2 + 10}{2}$ = 6 und b = Abstand zur Mitte = 10 – 6 = 4 $\Longrightarrow x = 6 \pm 4$

b) $x \in [3; 7]$: $a = \frac{\_\_\_ + \_\_\_}{2}$ = ___ und b = ___ – ___ = ___ $\Longrightarrow x$ = ___ ± ___

c) $x \in [-5; 8]$ **d)** $x \in [2{,}9; 6{,}8]$ **e)** $x \in [-7; 7]$ **f)** $x \in [1 - a; 1 + a]$

A 6 → G 3

Gegeben sind Aussagen zu den Beträgen zweier ganzer Zahlen a und b. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.

Tipp $A \Longrightarrow B$ steht für „Aus Aussage A folgt Aussage B.", d. h. immer, wenn A gilt, dann gilt auch B. Wenn in den Aussagen Variablen vorkommen, muss die Folgerung für alle möglichen Werte der Variablen in A gelten.

$\lvert a\rvert < \lvert b\rvert \Longrightarrow a < b$	☐
$a < b \Longrightarrow \lvert a\rvert < \lvert b\rvert$	☐
$\lvert -a\rvert < \lvert -b\rvert \Longrightarrow -\lvert b\rvert < -\lvert a\rvert$	☐
$\lvert a\rvert = \lvert b\rvert \Longrightarrow a = b$	☐
$a = b \Longrightarrow \lvert a\rvert = \lvert b\rvert$	☐

A 7 Gib das kleinste Intervall I mit ganzzahligen Grenzen an, das alle gegebenen Zahlen enthält.

a) 4,5; 3,1; 7; 2,8; 6 kleinste Zahl: 2,8 und größte Zahl: 7 $\Longrightarrow I = [2; 7]$

b) 9,8; 5,6; 3; 4; 7,7 kleinste Zahl: ___ und größte Zahl: ___ $\Longrightarrow I = [$ ___ ; ___ $]$

c) −2,4; −3,1; 0; 4,9; 1,7 **d)** $0{,}01; \frac{1}{0{,}1}; -1; -0{,}9; 9$ **e)** $\sqrt{3}; \pi; \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; -\sqrt{3}$ **f)** $|-12|; -|37|; -|-28|; -32; |15|$

A 8 Trage die korrekte Mantisse der Gleitkommadarstellung der gegebenen Zahl ein.

→ B 3

a) $297 = 2{,}97 \cdot 10^2$ **c)** $-2\,861 =$ ___ $\cdot 10^3$ **e)** $500\,000 =$ ___ $\cdot 10^5$ **g)** $-781{,}34 =$ ___ $\cdot 10^2$

b) $473 =$ ___ $\cdot 10^2$ **d)** $0{,}0045 =$ ___ $\cdot 10^{-3}$ **f)** $-0{,}094 =$ ___ $\cdot 10^{-2}$ **h)** $0{,}000\,101 =$ ___ $\cdot 10^{-4}$

A 9 Die gegebene Zahl soll in Gleitkommaschreibweise dargestellt werden. Bestimme zuerst das Vorzeichen der Hochzahl und anschließend die vollständige Gleitkommadarstellung.

→ W 3

a) 3718 $|3718| > 1 \Longrightarrow$ Hochzahl positiv $3718 = 3{,}718 \cdot 10^3$ **d)** 60100 **g)** −0,99

b) −200 $|-200|$ ○ $1 \Longrightarrow$ Hochzahl ________ $-200 = -2 \cdot 10$ ___ **e)** 0,0368 **h)** −1,0101

c) 0,001 $|0{,}001|$ ○ $1 \Longrightarrow$ Hochzahl ________ $0{,}001 = 1 \cdot 10$ ___ **f)** 781,34 **i)** 10

A 10 Begründe, warum die gegebene Zahl a nicht in Gleitkommadarstellung gegeben ist, und stelle sie anschließend sowohl in Gleitkomma- als auch in der üblichen Dezimalschreibweise dar.

→ G 5

a) $a = 10{,}9 \cdot 10^3$

Die Zahl a ist nicht in Gleitkommaschreibweise gegeben, da der Betrag von 10,9 größer als 10 ist.

Gleitkommadarstellung: Das Komma wird um eine Stelle nach links verschoben und die Hochzahl um 1 erhöht: $a = 1{,}09 \cdot 10^4$

Dezimaldarstellung: Das Komma wird wegen 10^{+3} um 3 Stellen nach rechts verschoben: $a = 10\,900$

b) $a = 0{,}8 \cdot 10^{-4}$

Die Zahl a ist nicht in Gleitkommaschreibweise gegeben, da der Betrag von ___ ________ als 1 ist.

Gleitkommadarstellung: Das Komma wird um ________ Stelle nach ________ verschoben und die Hochzahl um ___ ________ : $a =$ ________

Dezimaldarstellung: Das Komma wird um ___ Stellen nach ________ verschoben: $a =$ ________

c) $-95{,}6 \cdot 10^{-7}$ **d)** $600{,}1 \cdot 10^3$ **e)** $0{,}005 \cdot 10^{-4}$ **f)** $-0{,}037 \cdot 10^5$ **g)** $-124 \cdot 10^2$

A 11 Gib die gegebene Zahl mithilfe des Taschenrechners in der üblichen Dezimalschreibweise an und wandle sie anschließend in die Gleitkommadarstellung um.

a) $\frac{4}{1000} = 0{,}004 = 4 \cdot 10^{-3}$ **b)** $\frac{76}{10\,000} =$ ___ $=$ ___ $\cdot 10$ ___ **c)** $\frac{8}{10^2} =$ ___ $=$ ___ $\cdot 10$ ___

d) $591 \cdot 10^5$ **e)** $\frac{0{,}0045}{10^{-8}}$ **f)** $-0{,}094 \cdot 10^{-4}$ **g)** $\frac{5 \cdot 10^{12}}{4 \cdot 10^6}$

A 12 Gib die Zahl mithilfe des Taschenrechners in Gleitkommaschreibweise an.

a) $\frac{25}{10^4} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ **b)** $\frac{38}{10^{-5}}$ **c)** $\frac{8 \cdot 10^2}{5 \cdot 10^{-3}}$ **d)** $\frac{0{,}07 \cdot 10^{-2}}{10^6}$ **e)** $\frac{125}{4} \cdot 10^4$

A 13 Wandle in das angegebene Zahlensystem um.

→ G 4

a) $[123]_{10} = [1111011]_2$ **c)** $[83]_{10} = [$ ________ $]_2$ **e)** $[1110]_2 = [$ ________ $]_{10}$

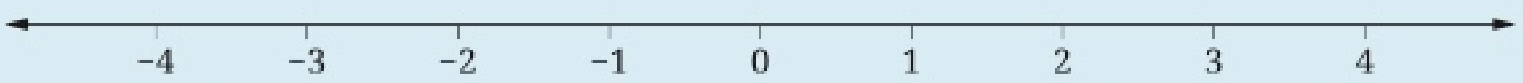
b) $[51]_{10} = [$ ________ $]_2$ **d)** $[6\,014]_{10} = [$ ________ $]_{16}$ **f)** $[101100]_2 = [$ ________ $]_{10}$

Lösungen

A 14 Gib das kleinstmögliche Intervall der Form $I = [a; b]$ mit ganzzahligen Grenzen a und b an, das die Zahlen $-\sqrt{2}$, $|-2|$, $2 \cdot 10^2$, $-2 \cdot 10^{-2}$ und π enthält.

$I =$ ____________________

A 15 Stelle die Lösungsmenge der Ungleichung $4x + 7 < 3$ auf der Zahlengeraden grafisch dar.



A 16 Gegeben ist die Menge $M = \{x \in \mathbb{Z}^- \mid x \geq -4\}$.
Kann die Menge M in Intervallschreibweise geschrieben werden? Begründe deine Antwort.

A 17 Ordne den gegebenen Mengen jeweils die entsprechende Intervallschreibweise zu.

$M_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$	
$M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$	
$M_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$	
$M_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$	

A	$[0; 2]$
B	$(0; 2)$
C	$[2; \infty)$
D	$(-\infty; 2]$
E	$(0; \infty)$
F	$[0; 2)$

A 18 Ein Mann mittleren Alters gilt nach dem Body-Mass-Index (BMI in kg/m²) als normalgewichtig, wenn er bei einer Körpergröße von 180 cm ein Gewicht von 70,5 kg ± 10,5 kg besitzt.
Stelle diesen Gewichtsbereich (in kg) als Intervall dar.

$I =$ ____________________

A 19 Auf einer Packung Schrauben steht: „Länge: 5 cm ± 0,1 cm".
Welche Länge haben die Schrauben in dieser Verpackung laut Angabe minimal bzw. maximal?

Minimale Schraubenlänge = ______________ Maximale Schraubenlänge = ______________

A 20 Eine 3 cm hohe Pflanze wächst pro Jahr um 4 bis 7 cm. Gib den Bereich an, in dem sich die Höhe der Pflanze nach drei Jahren Wachstum befindet.

Höhe der Pflanze nach drei Jahren: ____________ $< x <$ ____________

A 21 Die Entfernung zwischen Erde und Mond beträgt zu einem bestimmten Zeitpunkt 384 400 km. Gib diese Entfernung in Metern in Gleitkommadarstellung an.

Entfernung Erde – Mond = ____________________ m

A 22 Messungen der elektrischen Spannung in einem bestimmten Stromkreis haben zu unterschiedlichen Zeitpunkten die folgenden Werte in Volt ergeben: 0,0027 V; 0,0025 V; 0,0018 V; 0,003 V; 0,0021 V.

a) Stelle alle Messwerte als Gleitkommazahlen dar.
b) Gib das kleinste Intervall der Form $[a \cdot 10^{-3}; b \cdot 10^{-3}]$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ an, das alle Messwerte (in V) enthält.

Q

R

S

T

U

V

W

Z

Liste der Grundkompetenzen

AG-R … Reifeprüfungs-Grundkompetenz aus dem Inhaltsbereich *Algebra und Geometrie*
AG-L … Lehrplan-Grundkompetenz aus dem Inhaltsbereich *Algebra und Geometrie*

Algebra und Geometrie (AG)

AG 1 Grundbegriffe der Algebra

AG-R 1.1 Wissen über die Zahlenmengen, -bereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ verständig einsetzen können

AG-R 1.2 Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variablen, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit

AG-L 1.3 mit Aussagen und Mengen umgehen können

AG-L 1.4 Zahlen in einem nichtdekadischen Zahlensystem darstellen können

AG 2 (Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme

AG-R 2.1 einfache Terme und Formeln aufstellen, umformen und im Kontext deuten können

AG-R 2.2 lineare Gleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen und die Lösung im Kontext deuten können

AG-R 2.3 quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen; Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können

AG-R 2.5 lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen; über Lösungsfälle Bescheid wissen; Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können

AG-L 2.6 den Satz von Vieta kennen und anwenden können

AG 3 Vektoren und analytische Geometrie

AG-R 3.1 Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können

AG-R 3.2 Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können

AG-R 3.3 Definitionen der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarprodukt) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können

AG-R 3.4 Geraden in $\mathbb{R}^2$ durch Parameterdarstellungen und Gleichungen, in $\mathbb{R}^3$ durch Parameterdarstellungen angeben und diese Darstellungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln können

AG-R 3.5 Normalvektoren in $\mathbb{R}^2$ aufstellen, verständig einsetzen und interpretieren können

AG-L 3.6 die geometrische Bedeutung des Skalarprodukts kennen und den Winkel zwischen zwei Vektoren ermitteln können

AG-L 3.7 Einheitsvektoren ermitteln, verständig einsetzen und interpretieren können

AG 4 Trigonometrie

AG-R 4.1 Definitionen von Sinus, Cosinus und Tangens im rechtwinkeligen Dreieck kennen und zur Auflösung rechtwinkeliger Dreiecke einsetzen können

AG-R 4.2 Definitionen von Sinus und Cosinus für Winkel größer als 90° kennen und einsetzen können

AG-L 4.3 einfache Berechnungen an allgemeinen Dreiecken, an Figuren und Körpern (auch mittels Sinus- und Cosinussatz) durchführen können

AG-L 4.4 Polarkoordinaten kennen und einsetzen können

Funktionale Abhängigkeiten (FA)

FA 1 Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften

FA-R 1.1 für gegebene Zusammenhänge entscheiden können, ob man sie als Funktionen betrachten kann

FA-R 1.2 Formeln als Darstellung von Funktionen interpretieren und dem Funktionstyp zuordnen können

FA-R 1.3 zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge wechseln können

FA-R 1.4 aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können

FA-R 1.6 Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen grafisch und rechnerisch ermitteln und im Kontext interpretieren können

FA-R 1.7 Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständig arbeiten können

FA 2 Lineare Funktion [$f(x) = k \cdot x + d$]

FA-R 2.1 verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene lineare Zusammenhänge als lineare Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

FA-R 2.2 aus Tabellen, Graphen und Gleichungen linearer Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter k und d ermitteln und im Kontext deuten können

FA-R 2.3 die Wirkung der Parameter k und d kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können

FA-R 2.4 wichtige Eigenschaften kennen und im Kontext deuten können:
$f(x+1) = f(x) + k$;
$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k = [f'(x)]$

FA-R 2.5 die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktion bewerten können

FA-R 2.6 direkte Proportionalität als lineare Funktion vom Typ $f(x) = k \cdot x$ beschreiben können

FA3 Potenzfunktion mit $f(x) = a \cdot x^z$ und Funktionen vom Typ $f(x) = a \cdot x^z + b$ mit $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oder $z = \frac{1}{2}$

FA-R 3.1 verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge dieser Art als entsprechende Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

FA-R 3.2 aus Tabellen, Graphen und Gleichungen dieser Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter a und b ermitteln und im Kontext deuten können

FA-R 3.3 die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können

FA-R 3.4 indirekte Proportionalität als Potenzfunktion vom Typ $f(x) = \frac{a}{x}$ (bzw. $f(x) = a \cdot x^{-1}$) beschreiben können

FA 4 Polynomfunktion $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$, mit $n \in \mathbb{N}$

FA-R 4.1 typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion (er)kennen

FA-R 4.3 aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Polynomfunktionen Funktionswerte, aus Tabellen und Graphen sowie aus einer quadratischen Funktionsgleichung Argumentwerte ermitteln können

LERN- UND ERFOLGREICH ERPROBT TRAININGSSYSTEM

MatheTutor – Dein Begleiter durch die 5. Klasse

Mit deinem **MatheTutor** sind die **Grundkompetenzen** der 5. Klasse kein Problem für dich! Er wiederholt mit dir von Grund auf den wichtigsten Stoff und übt alles ausführlich mit dir – wenn du willst in **mehr als 500 Aufgaben**.

Warum der MatheTutor so gut funktioniert? Er wurde von **Nachhilfe-Profis** entwickelt, die sich richtig gut damit auskennen, Mathematik einfach zu vermitteln. Dafür haben sie sich ein **erfolgreiches Lern- und Trainingssystem** ausgedacht:

1. ***Informiere dich*** zu Beginn jedes Kapitels über benötigte Grundlagen und praktische Werkzeuge für die anstehenden Aufgaben.
2. ***Vollziehe nach***, wie du typische Aufgaben meisterst. Musterbeispiele weisen dir den Weg.
3. ***Probiere selbst*** eine solche Aufgabe zu lösen. Dabei kannst du dich am entsprechenden Musterbeispiel orientieren.
4. ***Trainiere weiter*** und lerne weitere Aufgabentypen kennen, natürlich mit Hilfestellungen. So gewinnst du nach und nach die nötige Sicherheit.
5. ***Teste dich*** selbst anhand von typischen Prüfungsaufgaben – wie bei Schularbeiten und bei der Matura!

Weiters findest du online:

- **Ausführliche Lösungen** mit Hinweisen und Erklärungen – auch zum Technologieeinsatz
- **Zusätzliche *Probiere selbst*-Aufgaben**
- **Alle Modellschritte** an einer Stelle als praktisches Hilfsmittel beim Lernen und Üben

www.helbling.com

HELBLING

ISBN 978-3-99069-167-0
9 783990 691670